# סטטיסטיקה לניהול 70007

## פרק 16 - שיטות באמידה נקודתית ( אומד חסר הטיה ואנמ

### תוכן העניינים

1. אומד חסר הטייה ..... 1
2. אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית ..... 8
3. MSE ..... 10
4. אומד ניראות מקסימלית ..... 13

# אומד חסר הטייה:

## רקע:

$\hat{\theta}$ יהיה אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל-$\theta$ : $E(\hat{\theta})=\theta$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

המשתנה $X$ הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **הסתברות** | $2\theta$ | $1-60\theta$ | $4\theta$ |

מעוניינים לאמוד את $\theta$ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: $X_1$ ו- $X_2$.

א. הראו שהאומד: $T_1=\frac{2X_1+X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל-$\theta$.

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta})-\theta$. כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד $T_1$?

ג. תקנו את $T_1$, כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3=1.5X_1-X_2-1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל-$\theta$, אז $g(\hat{\theta})$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם $g$ תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X=3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה $\sigma^2$: $S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}=\frac{\sum x_i^2-n\bar{x}^2}{n-1}$.

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של $X$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**תזכורות חשובות:**

אם: $Y=aX+b$, אזי: $E(Y)=aE(X)+b$ , $V(Y)=a^2\cdot V(X)$ , $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים, אזי:

$$E(T)=E(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots\ldots+E(X_n).$$

אם: $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T)=V(X_1+X_2+\ldots\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots\ldots+V(X_n).$$


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** הציון במבחן מסוים של תלמידי כתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת $\mu$ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת $\mu$, נלקח מדגם של 5 ציונים: $X_1,\ldots,X_5$.

שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

חוקר א' הציע: $T_1=\frac{X_1+\ldots+X_5}{5}$.

חוקר ב' הציע: $T_2=\frac{2X_1-X_3+X_4}{2}$.

חוקר ג' הציע: $T_3=\frac{2X_1+X_3}{2}$.

א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?

ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.

ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100.
חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.

ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

**2)** כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- $\sigma^2$. הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה: $T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ , $T_2=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$.

א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.

ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

**3)** $X\sim B(n,p)$. כלומר, $X$ הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר $P$ (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל $n$.

א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$.

ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד?

ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?

ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**4)** בתיק מניות שתי מניות. מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר לא ידוע: $\theta$ , $0 \le \theta \le 2$.

פונקציית ההסתברות של $X$ - מספר המניות שיעלו ביום מסוים:

$$P(X=2)=\frac{\theta}{6} \ , \ P(X=1)=\frac{\theta}{3} \ , \ P(X=0)=1-\frac{\theta}{2} .$$

א. מְצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל-$\theta$, שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום, במשך שלושה ימים - $X_1, X_2, X_3$ (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

**5)** בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$ באופן הבא:

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא $3\theta$,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא $\theta$.

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר $\theta$ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר $\theta$ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

**6)** קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $5\theta$.

ב. אם $T$ הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר $\theta$, אז $T^2$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר $\theta^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא $p$ , ובמכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא $2p$ .
דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה.
נסמן ב- $X$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- $Y$ את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה.
איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- $p$ ?

א. $\frac{X}{20}$ .

ב. $\frac{Y}{20}$ .

ג. $\frac{X+Y}{60}$ .

ד. $\frac{2X+Y}{80}$ .

**8)** יהיו $T_1$ ו- $T_2$ אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$ .

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta^2$ , המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$ .

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $\theta(1-\theta)$ , המתבסס על $T_1$ ו- $T_2$ .

**9)** נתון ש- $X$ הינו משתנה מקרי עם תוחלת $\mu$ ושונות $\sigma^2$ .
נדגמו $n$ תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסיה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ אומד חסר הטייה ל- $\mu$ , כאשר : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ .

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות : $X_1 \cdot X_2$ .
הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- $\mu^2$ .

**10)** $X_i \sim N(\mu,1)$ , כאשר : $i = 1,2...,n$ .
נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו.
מצאו אומד חסר הטיה ל- $\mu^2$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** נתונות $n$ תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+\beta x}{2} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}.$$

א. הראו כי האומד $3\bar{X}$ הנו אומד בלתי מוטה ל-$\beta$.

ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

**12)** $X_1,X_2,...,X_n$ הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}X\cdot A & 0\le x\le\theta\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}.$$

א. בטאו את ערכו של $A$ באמצעות $\theta$, כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל-$\theta$, על סמך $n$ התצפיות.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** א. $T_1$ ו- $T_2$. ב. $\frac{2}{3}T_3$. ג. $T_1=76.6\ ,T_2=110$ ד. $T_1$.

**2)** א. ראו בווידאו. ב. $T_2$.

**3)** א. $\frac{x}{n}$. ב. $1-\frac{x}{n}$. ג. $X$. ד. $\theta$.

**4)** א. $\frac{3x}{2}$. ב. $\frac{3\overline{x}}{2}$.

**5)** א. $1-\frac{x}{2}$. ב. $1-\frac{1}{2}\overline{x}$. ג. 0.125. ד. $3\left(1-\frac{1}{2}\overline{x}\right)$.

ה. לשונות 0.917.

**6)** א. נכון. ב. לא נכון.

**7)** ב'.

**8)** א. $T_1\cdot T_2$. ב. $T_1-T_1\cdot T_2$.

**9)** א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

**10)** $\overline{X}^2-\frac{1}{n}$.

**11)** א. שאלת הוכחה. ב. $V\left(3\overline{X}\right)=\frac{3-\beta^2}{n}$.

**12)** א. $A=\frac{2}{\theta^2}$. ב. $\theta=\frac{3}{2}\overline{X}$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד חסר הטיה בעל שונות מינימלית:

אומד חסר הטיה יעיל ביותר – MVUE (Minimum-variance unbiased estimator).

## רקע:

$T$ יהיה MVUE, אם מתקיים ש- $T$ אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובנוסף מתקיים ש:
$V(T)\le V\left(\hat{\theta}\right)$, לכל $\hat{\theta}$ חסר הטיה אחר.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של $\lambda$ בסניף A וקצב של $2\lambda$ בסניף B.
נדגמו $n$ ימים מכל סניף, ונבדק בכל יום:

$X_i$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום $i$.

$Y_j$ - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום $j$.

על מנת לאמוד את $\lambda$, מוצע האומד: $\alpha\bar{X}+\beta\bar{Y}$.

א. מה התנאי, שצריך להתקיים על $\alpha$ ו- $\beta$, כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריכים להיות $\alpha$ו- $\beta$ כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** $T_1$ ו- $T_2$ הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר $\theta$.

כמו כן, נגדיר: $T = aT_1 + bT_2$.

א. מה צריך להיות התנאי על $a$ ו- $b$, כדי ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה?

ב. $\sigma_1^2$ ו- $\sigma_2^2$ הם השונויות של $T_1$ ו- $T_2$, בהתאמה.

מצאו $a$ ו- $b$, כך ש- $T$ יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$, ובעל שונות מינימלית.

**2)** במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק.

תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה.

השונויות של כל מכונה שונות, ומקיימות: $\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2$ , $\sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$.

הוחלט לדגום $n$ חלקים מכל מכונה, ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\overline{X}_i$ - יהיה הממוצע המתקבל במכונה $i$.

יהי: $W = \sum_{i=1}^{3} a_i \overline{X}_i$ האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים $a_i$, כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי-מוטה?

ב. נניח ש- $a_1 = a_2$.

מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

## תשובות סופיות:

**1)** א. $a+b=1$.

ב. $a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ , $b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

**2)** א. $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1$.

ב. $a_1 = a_2 = 0.4$, $a_3 = 0.2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

## רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קריטריון MSE:
Mean Squared Error – תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2 .$$

כאשר: $V\left(\hat{\theta}\right)$ - הינה שונות האומד.

$E\left(\hat{\theta}\right)-\theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם $T_1$ ו- $T_2$ הינם אומדים לפרמטר $\theta$, האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.
כלומר, אם: $MSE\left(T_1\right)>MSE\left(T_2\right)$, אז $T_2$ עדיף על $T_1$.

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

נתון משתנה $X$ המתפלג אחיד רציף באופן הבא: $X\sim U\left(3,\theta\right)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר $\theta$ על סמך תצפית בודדת: $T_1=2X-3$ ו- $T_2=\frac{3X-3}{2}$.

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר $\theta$?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת.
מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות.
לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.

**2)** בעיר מסוימת בשוויץ בכל $\theta$ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת.
דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - $X$.

א. הצע אומד חסר הטיה ל-$\theta$, על סמך $X$.

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את $\theta$ על סמך האומד: $1.5X$.
האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?

**3)** חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן: הפרמטר $P$). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי $X$ - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף.
הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1=\frac{X}{5}$ ו- $T_2=\frac{X+1}{7}$.

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

**4)** מספר השריפות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת $\lambda$. נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:
$\hat{\lambda}_1=\frac{\sum_{i=1}^{10}X_i}{10}$ ו- $\hat{\lambda}_2=\frac{2\cdot\sum_{i=1}^{5}X_i+2\cdot\sum_{i=6}^{10}X_i}{10}$.
כאשר: $X_i$ = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה-$i$.
איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר $\lambda$?

**5)** הוכח ש: $E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2=V\left(\hat{\theta}\right)+\left(E\left(\hat{\theta}\right)-\theta\right)^2$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** שלוש תצפיות.

**2)** א. $2x$. ב. אומד מוטה. ג. סעיף ב.

**3)** א. $T_1$. ב. $T_2$. ג. $T_1$.

**4)** $\hat{\lambda}_1$.

**5)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

# אומד נראות מקסימלית:

## רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- $X$ משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x,\theta)$,

כאשר $\theta$ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו: $X_1, X_2, ..., X_n$ תוצאות מדגם מקרי בגודל $n$ הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1,\theta)\cdot P(x_2,\theta)\cdot ...\cdot P(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i,\theta).$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של $\theta$), כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי. כלומר, המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש $\theta$.

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta)\cdot f(x_2,\theta)\cdot ...\cdot f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta).$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא $p$ (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.
הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התהליך שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של $p$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$ הוא האומד $\hat{\theta}$, שממקסם את פונקציית הנראות $L(\theta)$.
כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקיבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

**שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:**

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף $ln$ כדי להקל על המלאכה).

**המשך דוגמה:**

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור $p$.

**משפט:** אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $\theta$, אזי $g\left(\hat{\theta}\right)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $g\left(\hat{\theta}\right)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

**המשך דוגמה:**

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא $p$ (לא ידוע).
השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.

א. חשבו את פונקציית הנראות של $p$ , וציירו גרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $p$ .

ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $p$ , אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.

**2)** מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של $\lambda$ לקוחות ביום.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\lambda$ , על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- $n$ ימים מסוימים.

**3)** הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda$.
דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7,5 ו-3.

א. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך $n$ תצפיות כלשהן.

ב. מהו האומדן לפרמטר?

**4)** משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $U(0,q)$.

כדי לאמוד את $\theta$ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.

א. אלעד הכין ביום מסוים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של $\theta$ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.

ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך התצפית.

ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1,3,1.5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$ על סמך המדגם הזה.

ד. מצאו באופן כללי אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$ , על סמך מדגם של $n$ בני נוער – $X_1,\ldots,X_n$ .


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**5)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות $\sigma^2$ לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1,\ldots,X_n$ מתצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 174, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

**6)** פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר $p$ בהתפלגות הבינומית, על סמך מדגם בגודל $n$, בו $X$ הוא מספר ההצלחות במדגם.

**7)** $X$ הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}2\theta xe^{-\theta x^2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-$\theta$ על סמך $n$ תצפיות בלתי תלויות: $X_1,\ldots,X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל-$\theta^2$.

**8)** בכד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובכד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

**9)** הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**10)** מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מקרי $X$, בעל התפלגות התלויה בפרמטר $\theta$, באופן הבא:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $4\theta^2$ | $4\theta-8\theta^2$ | $1-4\theta+4\theta^2$ |

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר $\theta$, על-סמך המדגם הנתון.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

**11)** אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומד בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

**12)** מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה.
דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

**13)** במשחק מחשב שלוש רמות משחק:
ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.
ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.
ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.
יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר.
הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק, על סמך מספר הפעמים שסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי, שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**14)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר $\theta$.

**15)** $X_1, X_2, ..., X_n$ מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=k)=\frac{\binom{2}{k}\cdot P^k\cdot(1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2} \qquad K=1,2$$

הוכח שא.נ.מ ל- $P$, הינו: $2-\frac{2}{\overline{X}}$.

**16)** במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא $P$. כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא ש-30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור $P$.

ב. רשמו את האומד שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של $n$ מכשירים שמתוכם נמצאו $Y$ מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פי צפיפות: $f(t)=\theta e^{-\theta t}$ עבור $t>0$.
מצא א.נ.מ. עבור $\theta$, המבוסס על $Y$.
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

**17)** חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10 אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

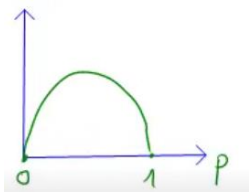
א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה $X$ – מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא $P$.

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 6, 2, 7, 3, 8, 2, 2, 1, 5.
מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור $P$, על סמך התוצאות שהתקבלו.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

1) א. $L(p)=(1-p)\cdot p$. להלן גרף:




ב. 0.5. ג. $\frac{2}{9}$.

2) א. $X$. ב. $\overline{X}$.

3) א. $\frac{1}{\overline{X}}$. ב. $\frac{2}{9}$.

4) א. 1. ב. 1. ג. 3. ד. $\hat{\theta}=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$.

5) א. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-170)^2}{n}$. ב. 40.2.

6) $\frac{x}{n}$.

7) א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$. ב. $\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$.

8) א. ראה סרטון. ב. כד א'.

9) א. 32. ב. 0.3916.

10) א. 0.45. ב. 0.81.

11) א.ראה סרטון. ב. הוגן.

12) א. 0.08. ב.0.92. ג. 11.5.

13) א. $\hat{\theta}=\begin{cases}3 & X=0,1\\ 1 & X=2\end{cases}$. ב. 1. ג. $\hat{p}=\begin{cases}2\cdot 0.4\cdot 0.6 & X=0,1\\ 2\cdot 0.9\cdot 0.1 & X=2\end{cases}$.

14) $\max|X_i|$.

15) שאלת הוכחה.

16) א. 0.6124 ב. $\hat{p}=\sqrt{\frac{y}{n}}$ ג. 0.49.

17) א. $P(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 1\le x\le 9\\ (1-p)^9 & x=10\end{cases}$. ב. 0.1818.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## נספח:
## התפלגויות רציפות

| ההתפלגות | פונקציית הצפיפות | פונקציית ההתפלגות המצטברת | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X \sim U(a,b)$ | $f(x)=\frac{1}{b-a}$ $a \le x \le b$ | $\frac{t-a}{b-a}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | | $b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$ |
| $X \sim \exp(\lambda)$ | $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ | $1-e^{-\lambda t}$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. $\lambda$ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן. | $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ | $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ | $\Phi(t)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ | $\hat{\mu}=\bar{X}$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ |

## התפלגויות בדידות

| ההתפלגות | פונקציית ההסתברות $P(X=k)$ | תוחלת | שונות | הערות | אנ"מ |
|---|---|---|---|---|---|
| בינומית $B(n,p)$ $0 \le p \le 1$ | $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,\ldots,n$ | $np$ | $np(1-p)$ | (1) | $\hat{P}=\frac{Y}{n}$ |
| גיאומטרית $G(p)$ $0<p\le 1$ | $(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots,\infty$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | (2) | $\hat{P}=\frac{1}{\bar{X}}$ |
| אחידה $U(a,b)$ | $\frac{1}{b-a+1}$ $K=a,\ldots,b$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ | (3) | $b=\max(X_i)$ $a=\min(X_i)$ |
| פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda>0$ | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\ldots,\infty$ | $\lambda$ | $\lambda$ | (4) | $\hat{\lambda}=\bar{X}$ |

(1) מספר ההצלחות ב- $n$ ניסויי ברנולי ב"ת. $p$ - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, $p$ - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין $a$ ו- $b$.

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, $\lambda$ - קצב האירועים.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל