לוגיקה ותורת הקבוצות

פרק 6 - שובך היונים

תוכן העניינים

1. שובך היונים 1

שובך היונים

שאלות

1) תהי $A=\{1,2,3,\cdots,49\}$.
הוכיחו כי לכל בחירה של קבוצה $B\subseteq A$, כך ש- $|B|=26$, יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.

2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1,\ldots 11\}$.
הוכיחו כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.

3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים, שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב- 3009? נמקו.

4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם.
הוכיחו שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A, **שסכום** איבריה מתחלק ב- n.

5) הוכיחו כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים, כחול ואדום, יש שתי נקודות שמרחקן אחד והן צבועות באותו צבע.

6) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $k\in\mathbb{N}$, כך שבמס' הטבעי $k\cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו- 0 בלבד.

7) הוכיחו כי מבין כל 12 מספרים דו-ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.

8) הוכיחו כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות, שאורך צלעו הוא אחד, יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.

9) הוכיחו כי בכל בחירה של $n+1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,2n\}$, יש שני מספרים x,y כך ש:

א. x,y זרים (כלומר, המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).

ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.

ג. הראו כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאים א ו-ב.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – טל פלדמן ©

10) נבחר 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1,2,3,\cdots,81\}$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שהפרשם הוא בדיוק 9.
הוכיחו גם כי המספר הנ"ל הדוק (כלומר מצאו 45 מספרים מתוך $\{1,2,3,\cdots,81\}$, שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).

11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים מתוך הסדרה החשבונית $1,4,7,10,\cdots,100$.
הוכיחו כי יש שני מספרים שסכומם 104.

12) n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים.
הוכיחו כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.

13) הוכיחו כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים,
יש משולש מונוכרומטי.

14) הוכיחו כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.

15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות, והוא מתכנן נאומי בחירות: לפחות אחד ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בסך הכל.
הוכיחו כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם 24 נאומים.

16) יהי $n\in\mathbb{N}$.
הוכיחו כי קיים $m\in\mathbb{N}$, כך ש- n מחלק את 2^m-1.
הדרכה: התבוננו בסדרה $2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots 2^{n+1}-1$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – טל פלדמן ©