# מתמטיקה למכינה 5 יחידות

## פרק 57 - שדות

### תוכן העניינים

1. חזרה על מושגים מתורת הקבוצות ..... 1
2. שדות ..... 5

# חזרה על מושגים מתורת הקבוצות

## שאלות

**1)** רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x\forall y:(x+y)^2>0$

ב. $\forall x\exists y:(x+y)^2>0$

ג. $\forall x\forall y\exists z:xz=\frac{y}{4}$

ד. $\forall x>0,\forall y>0\ ,\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n\exists k,n^3-n=6k$ ($k$ ו-$n$ טבעיים).

**2)** רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי־השוויון $x^2>4$, הוא $x>2$ או $x<-2$.

ב. אי השוויון $x^2+4>0$, מתקיים לכל $x$.

ג. לכל מספר טבעי $n$, המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר $x$, $|x|<1$ אם ורק אם $-1<x<1$.

**3)** רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2<16\}$

ב. $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2<16\}$

ג. $C=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2<16\}$

ד. $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid (x+4)(x-1)<0\}$

ה. $E=\{x\in\mathbb{N}\mid x^3+x^2-2x=0\}$

ו. $F=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<4\}$

**4)** הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן בצורה: $A=\{x\mid$ מקיים תכונה מסוימת $x\}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי־זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 4, 3, 2, 1.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A=\{11,13,17,19\}$

ב. $B=\{x \mid 10<x<20,\ x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C=\{11,11,17,13,19\}$

ד. $D=\{x \mid x=4k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

ה. $E=\{x \mid x=2m,\ m \text{ שלם זוגי}\}$

**6)** נתונה הקבוצה הבאה $A=\{1,2,\{2\},\{2,5\},4,\{2,4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

א. $5\in A$ ב. $2\in A$ ג. $\{2\}\in A$

ד. $\{2\}\subseteq A$ ה. $\{\{2\}\}\subseteq A$ ו. $\phi\in A$

ז. $\phi\subseteq A$ ח. $\{2,\{2\}\}\subseteq A$ ט. $\{2,4\}\subseteq A$

י. $\{2,4\}\in A$ יא. $\{\{2,4\}\}\in A$ יב. $\{2,5\}\subseteq A$

יג. $\{2,5\}\in A$ יד. $\{1,4\}\in A$

**7)** מצאו שתי קבוצות, $A$ ו-$B$, המקיימות:

א. $A\in B$

ב. $A\subseteq B$

**8)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ , $E=\{7,8\}$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה $X$:

א. $X\subseteq A$ וגם $X\not\subseteq D$.

ב. $X\subseteq D$ וגם $X\not\subseteq C$.

ג. $X\subseteq E$ וגם $X\not\subseteq A$.

**9)** הוכיחו: $A\subseteq B\wedge B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** נתונות הקבוצות הבאות:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ , $B=\{4,6,8,10\}$ , $C=\{3,5,7,9\}$ , $D=\{6,7,8\}$ .

רשמו את:

א. $A\cup B$

ב. $A\cap B$

ג. $(A\cup B)\cap C$

ד. $(B\cup C)\cap(B\cup D)$

ה. $(B\cap C)\cup(B\cap D)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לכל $x$ ולכל $y$ מתקיים $(x+y)^2>0$. הטענה אינה נכונה.

ב. לכל $x$ קיים $y$, כך ש- $(x+y)^2>0$. הטענה נכונה.

ג. לכל $x$ ולכל $y$ קיים $z$ כך ש- $xz=\frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.

ד. לכל $x$ חיובי ולכל $y$ חיובי מתקיים $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.

ה. לכל $n$ טבעי המספר $n^3-n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.

**2)** א. $x^2>4\Rightarrow x>2\vee x<-2$ ב. $\forall x: x^2+4>0$

ג. $\forall n\exists k: n^3-n=6k$ ד. $\forall x: |x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$

**3)** א. $A=(-4,4)$, בקבוצה אינסוף איברים.

ב. $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, בקבוצה 7 איברים.

ג. $C=\{1,2,3\}$, בקבוצה 3 איברים. ד. $D=\{-3,-2,-1,0\}$, בקבוצה 4 איברים.

ה. $E=\{0,1\}$, בקבוצה 2 איברים.

ו. $F=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, בקבוצה 9 איברים.

**4)** א. $A=\{x\,|\,x=2n-1,\ n\in\mathbb{N}\}$ ב. $B=\{11,13,17,19\}$

ג. $C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=4^2,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$ ד. $D=\{1,4,9,16\}$

**5)** הקבוצות $A$, $B$ ו- $C$ שוות זו לזו, והקבוצות $D$ ו- $E$ שוות זו לזו.

**6)** א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

**7)** $B=\{\{1,2\},1,2\}$ $A=\{1,2\}$

**8)** א. $A,\ C$ ב. $E,\ D$ ג. לא קיימת קבוצה כזאת.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** $1)\ A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,910\}$, $2)A\cap B=\{4,6,8\}$, $3)\left(A\cup B\right)\cap C=\{3,5,7,9\}$

$4)(B\cup C)\cap(B\cup D)=\{4,6,7,8,10\}$, $5)(B\cap C)\cup(B\cap D)=\{6,8\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# שדות

## שאלות

**1)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור $(\oplus)$ וכפל $(\otimes)$ על $R$.
בדקו, בכל אחד מהסעיפים, אילו מבין אקסיומות השדה מתקיימות.

א. $\begin{aligned} x\oplus y &= x+y+4 \\ x\otimes y &= 2xy \end{aligned}$

ב. $\begin{aligned} x\oplus y &= x+y \\ x\otimes y &= 2xy \end{aligned}$

ג. $\begin{aligned} x\oplus y &= y \\ x\otimes y &= y^2 \end{aligned}$

**2)** נתונה הקבוצה $Q[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$$

הוכיחו שהקבוצה $Q[\sqrt{2}]$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.

**3)** נתונה הקבוצה $C=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\ ,\ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

הוכיחו שהקבוצה $C$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה.
באיזה שדה מפורסם מדובר?

**4)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שבשדה, האיבר 0 הוא יחיד.

ב. הוכיחו שבשדה, האיבר 1 הוא יחיד.

ג. הוכיחו שבשדה, האיבר הנגדי הוא יחיד.

ד. הוכיחו שבשדה, האיבר ההופכי הוא יחיד.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** יהיו $a,b$ איברים בשדה.

א. הוכיחו כי $a+a=a \Leftarrow a=0$.

ב. הוכיחו כי $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

ג. הוכיחו כי $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$.

**6)** יהיו $a$ ו- $b$ איברים של שדה.
הוכיחו כי:

א. $(-1)\cdot a=-a$

ב. $(-a)b=a(-b)=-ab$

**7)** הוכיחו שבשדה, מתקיים חוק הצמצום.
כלומר, הוכיחו כי $ab=cb \Rightarrow a=c$, לכל $a,b,c$, בשדה $(b\neq 0)$.

**8)** הוכיחו שלכל שלושה איברים בשדה $0\neq a,b,c$,
קיים בשדה איבר יחיד $x$, כך ש- $ax+b=c$.

**9)** נתון $F$ שדה, ויהיו $x,y\in F$, כך ש- $xy\neq 0,1$.
הוכיחו, בעזרת אקסיומות השדה, כי $(x-xyx)^{-1}=x^{-1}+(y^{-1}-x)^{-1}$,
וכי שני האגפים של המשוואה לעיל מוגדרים היטב.

**10)** בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרות פעולות חיבור וכפל על $R^2$.

א.
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$$

ב.
$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)$$

האם $\left(R^2,+,\cdot\right)$ שדה?

**11)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הקבוצה $A=\{f:R\to R \mid \forall x,\ f(x)\neq 0\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור ופעולת כפל באופן הבא:
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
האם הקבוצה $A$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?

ב. נתונה הקבוצה $B=\{f:R\to R\}$.
על קבוצה זו נגדיר פעולת חיבור וכפל כמו בסעיף א'.
האם הקבוצה $B$, עם פעולות החיבור והכפל הנ"ל, מהווה שדה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** יהי $F$ שדה בעל מספר **סופי** של איברים.
הראו שלכל איבר $a\neq 0$ ב- $F$, קיים $k$ טבעי, כך ש- $a^k=1_F$.

**13)** נתון השדה $Z_7$.
א. רשמו את כל איברי השדה והגדירו את פעולות החיבור והכפל בשדה.
ב. מצאו את האיבר הנגדי לאיבר 3 ולאיבר 5 בשדה.
ג. מצאו את האיבר ההופכי לאיבר 4 ולאיבר 5 בשדה.

**14)** נתונה הקבוצה $Z_p=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},...,\overline{p-1}\}$, $p$ מספר ראשוני.
כאשר $\bar{a}=\{x\in Z\mid a\equiv x(\text{mod } p)\}$ ו- $a\equiv b(\text{mod } p)\Leftrightarrow \bar{a}=\bar{b}$.
לכל $\bar{a},\bar{b}$ בקבוצה, נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:
$$\bar{a}\oplus\bar{b}=\overline{a+b},\ \ \bar{a}\otimes\bar{b}=\overline{a\cdot b}$$
הוכיחו ש- $(Z_p,\oplus,\otimes)$ מהווה שדה.
בקיצור, הוכיחו כי קבוצת השאריות מודולו $p$, כאשר $p$ ראשוני, מהווה שדה.

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.
**2)** שאלת הוכחה.
**3)** שאלת הוכחה.
**4)** שאלת הוכחה.
**5)** שאלת הוכחה.
**6)** שאלת הוכחה.
**7)** שאלת הוכחה.
**8)** שאלת הוכחה.
**9)** שאלת הוכחה.
**10)** בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
**11)** בשני הסעיפים הקבוצה איננה שדה.
**12)** שאלת הוכחה.
**13)** א. שאלת הוכחה.
ב. האיבר הנגדי לאיבר $\bar{3}$ הוא $\bar{4}$, והאיבר הנגדי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{2}$.
ג. האיבר ההופכי לאיבר $\bar{4}$ הוא $\bar{2}$, והאיבר ההופכי לאיבר $\bar{5}$ הוא $\bar{3}$.
**14)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©