

# מתמטיקה ג

פרק 13 - שדות משמרים - אי תלות במסלול

תוכן העניינים

1. שדות משמרים - אי תלות במסלול.....1

## שדות משמרים - אי-תלות במסלול

### שאלות

בשאלות 6-1 קבעו האם  $\mathbf{F}$  הוא שדה משמר; אם כן, מצאו פונקציה  $\phi$ , כך ש- $\nabla\phi = \mathbf{F}$ .

$$\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y) \quad (1)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x) \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2) \quad (6)$$

$$(7) \quad \int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy \quad \text{נתון האינטגרל}$$

א. הוכיחו שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את (1,2) ו-(3,4).  
 ב. חשבו את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

$$(8) \quad \int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

$$(9) \quad \int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy \quad \text{חשבו את האינטגרל}$$

(10) יהי  $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$ . מצאו את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע על  $y = \sqrt{1-x^2}$ , מ-(1,0) ל-(-1,0).

11 חשבו את האינטגרל  $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$  תנו מובן פיסיקאלי לתוצאה.

12 נתון שדה וקטורי  $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ , ונתונים 3 מסלולים:

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשבו:

$$\oint_{L_3} \mathbf{F} dr \quad \text{ג.} \quad \oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ב.} \quad \oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{א.}$$

13 ענו על הסעיפים הבאים:

א. שרטטו את השדה הווקטורי  $\mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  ברביע הראשון.

ב. בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  נסמן  $f = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $g = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

1. הוכיחו כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון (מסעיף א) אינו שדה משמר בתחום  $D$  (מסעיף ב).

ד. הוכיחו שהשדה הנתון משמר בחצי המישור הימני

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ , ומצאו את פונקציית הפוטנציאל, במקרה זה.

ה. עתה נתון השדה בתחום  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ ,

חשבו את  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , כאשר  $C$  עקומה סגורה חלקה סביב הנקודה  $(0, 0)$ .

$$(14) \text{ נתון השדה הווקטורי } \mathbf{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{בתחום } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

א. שרטטו את השדה הווקטורי ברביע הראשון.

$$\text{ב. נסמן } f = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

1. הוכיחו כי  $f_y = g_x$  בתחום הנתון.

2. האם ניתן לקבוע שהשדה משמר על סמך התוצאה בסעיף הקודם?

ג. הוכיחו שהשדה הנתון הוא שדה משמר.

### הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

## תשובות סופיות

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 \quad (1)$$

(2) השדה אינו משמר.

$$\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x \quad (3)$$

$$\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y} \quad (4)$$

$$\phi(x, y, z) = xyz + z^3 \quad (5)$$

(6) השדה אינו משמר.

(7) א. שאלת הוכחה. ב. 236

(8) -58

(9) 5

(10) -2

(11) = 15 עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- (1, -1, 1) ל- (2, 1, -1), לאורך C.

(12) א.  $2\pi$  ב.  $-2\pi$  ג. 0

(13) א. ראו בעמוד הבא. ב. i. שאלת הוכחה. ii. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר.

ג. שאלת הוכחה. ד. שאלת הוכחה;  $\phi = \arctan \frac{y}{x} + k$ ; ה.  $2\pi$

(14) א. ראו בעמוד הבא. ב. 1. שאלת הוכחה. 2. לא ניתן לקבוע שהשדה משמר. ג. שאלת הוכחה.

## שרטוטים

שאלה 13 סעיף א:



שאלה 14 סעיף א:

