

אלגברה ליניארית

פרק 17 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

1. שדה השאריות מודולו p 1

שדות – שדה השאריות מודולו p

$$(1) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות}$$

- א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים \mathbb{R} .
 ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_7 .
 ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_5 .
 ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_3 .

$$(2) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$(4) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5$$

$$(5) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(6) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

- מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(7) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_3.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(10) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , המטריצה הפיכה.

(11) נתונה הקבוצה הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$\{(k, 1, 1, 1, 1), (1, k, 1, 1, 1), (1, 1, k, 1, 1), (1, 1, 1, k, 1), (1, 1, 1, 1, k)\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה תלויה ליניארית,
 ועבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

(12) במרחב $(\mathbb{Z}_5)^4$, מעל השדה \mathbb{Z}_5 , נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W :

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$$

$$W = \text{sp}\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים U ו- W , $U \cap W$, $U + W$.
 מה מספר האיברים בכל מרחב?

13 הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T: M_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$, המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\} \neq \text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T)$

2. $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$

3. $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$

המוגדרת על ידי $T(p(x)) = (x+3)p(x) + p(0)(x^3+2)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T ,

מהבסיס $E_1 = \{\bar{1}, x, x^2\}$ לבסיס $E_2 = \{\bar{1}, x, x^2, x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Im}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Ker}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

1 א. $(1, -1)$ ב. $(1, 6)$ ג. $(2, 1), (4, 0), (0, 2), (3, 3)$ ד. $(1, 2)$

2 $(0, 3, 0)$

3 $(1, 2, 1)$

4 $(0, 3, 0)$

5 $(1, -3, 2, 2)$

6 פתרון יחיד: $k = 0, k = 2$, 9 פתרונות: $k = 1$.

אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7 פתרון יחיד: $k = 0, k = 2, k = 4$, 5 פתרונות: $k = 3$, אין פתרון: $k = 1$.

אין אופציה של אינסוף פתרונות.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

10 $k = 0, k = 2, k = 4$

11 עבור $k = 1, k = 3$, הווקטורים תלויים ליניארית,

ועבור $k = 0, k = 2, k = 4, k = 5, k = 6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

12 $B_U = \{(4, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_W = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_{U+W} = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 4, 0)\}$, מספר האיברים: 125.

$B_{U \cap W} = \{(2, 4, 2, 1)\}$, מספר האיברים: 5.

13 ההעתקה הבאה:

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14 א. $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ב. $\dim \text{Im} T = 2$, $B_{\text{Im} T} = \{x + x^3, x^2 + 2x^3\}$, 25;

ג. $\dim \text{Ker} T = 1$, $B_{\text{Ker} T} = \{9 - 3x + x^2\}$, 5.