אלגברה ליניארית לפיזיקאים

פרק 5 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

שדות – שדה השאריות מודולו p

1) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.

ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.

ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.

ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

3) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

4) פתרו את המערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+x_3=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

5) פתרו את המערכת $\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

6) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

7) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

8) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

חשבו את A^{-1}.

9) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_3$.

חשבו את A^{-1}.

10) נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, המטריצה הפיכה.

11) נתונה הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\{(k,1,1,1,1),(1,k,1,1,1),(1,1,k,1,1),(1,1,1,k,1),(1,1,1,1,k),\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר k, הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

12) במרחב $(Z_5)^4$, מעל השדה Z_5, נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W:

$$U=\{(x,y,z,t)\,|\,3x+4y+z+t=0,\ \ 2x+y+2t=0\}$$

$$W=sp\{(2,3,0,4),\ (1,1,4,1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים $U, W\ \ U+W,\ U\cap W$.

מה מספר האיברים בכל מרחב?

13) הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T:M_2[\mathbb{Z}_5]\to M_2[\mathbb{Z}_5]$,
המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\}\neq \mathrm{Ker}(T)\subset \mathrm{Im}(T)$
2. $\mathrm{Ker}(T)\neq \mathrm{Im}(T)$
3. $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14) נתונה העתקה ליניארית $T:P_2[\mathbb{Z}_5]\to P_3[\mathbb{Z}_5]$,
המוגדרת על ידי $T(p(x))=(x+\overline{3})p(x)+p(\overline{0})(x^3+\overline{2})$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T,
מהבסיס $E_1=\{\overline{1},x,x^2\}$ לבסיס $E_2=\{\overline{1},x,x^2,x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Im}(T)$.
כמה איברים יש ב- $\mathrm{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\mathrm{Ker}(T)$.
כמה איברים יש ב- $\mathrm{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

1) א. $(1,-1)$ ב. $(1,6)$ ג. $(2,1),\ (4,0),\ (0,2),\ (3,3)$ ד. $(1,2)$

2) $(0,3,0)$

3) $(1,2,1)$

4) $(0,3,0)$

5) $(1,-3,2,2)$

6) פתרון יחיד: $k=0,\ k=2$, 9 פתרונות: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7) פתרון יחיד: $k=0,\ k=2,\ k=4$, 5 פתרונות: $k=3$, אין פתרון: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות.

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$

9) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\2&2\end{pmatrix}$

10) $k=0,\ k=2,\ k=4$

11) עבור $k=1,\ k=3$, הווקטורים תלויים ליניארית,
ועבור $k=0,\ k=2,\ k=4,\ k=5,\ k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

12) $B_U=\{(4,0,2,1),\ (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25.
$B_W=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.
$B_{U+W}=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2),\ (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.
$B_{U\cap W}=\{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.

13) ההעתקה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

14) א. $[T]=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&0\\0&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}$ ב. $\dim \operatorname{Im}T=2$, $B_{\operatorname{Im}T}=\{x+x^3, x^2+2x^3\}$, 25;
ג. $\dim KerT=1$, $B_{KerT}=\{9-3x+x^2\}$, 5.