

אלגברה ליניארית א'

פרק 3 - שדה השאריות מודולו p

תוכן העניינים

1. שדה השאריות מודולו p 1

שדות – שדה השאריות מודולו p

$$(1) \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{נתונה מערכת המשוואות}$$

- א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים \mathbb{R} .
 ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_7 .
 ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_5 .
 ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_3 .

$$(2) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$(3) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

$$(4) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_5$$

$$(5) \quad \text{פתרו את המערכת} \begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(6) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות} \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{מעל } \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

- מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(7) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , למערכת:
 א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

$$(8) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(9) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_3.$$

חשבו את A^{-1} .

$$(10) \quad \text{נתונה המטריצה } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_5.$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , המטריצה הפיכה.

(11) נתונה הקבוצה הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :

$$\{(k, 1, 1, 1, 1), (1, k, 1, 1, 1), (1, 1, k, 1, 1), (1, 1, 1, k, 1), (1, 1, 1, 1, k)\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה תלויה ליניארית,
 ועבור אילו ערכים של הפרמטר k , הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

(12) במרחב $(\mathbb{Z}_5)^4$, מעל השדה \mathbb{Z}_5 , נגדיר שני תתי-מרחבים, U ו- W :

$$U = \{(x, y, z, t) \mid 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$$

$$W = \text{sp}\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים U ו- W , $U \cap W$, $U + W$.
 מה מספר האיברים בכל מרחב?

13 הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T: M_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$, המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\} \neq \text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T)$

2. $\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T)$

3. $T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

14 נתונה העתקה ליניארית $T: P_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$

המוגדרת על ידי $T(p(x)) = (x+3)p(x) + p(0)(x^3+2)$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה T ,

מהבסיס $E_1 = \{\bar{1}, x, x^2\}$ לבסיס $E_2 = \{\bar{1}, x, x^2, x^3\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Im}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל- $\text{Ker}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

$$(1, 2) \quad \text{ד.} \quad (2, 1), (4, 0), (0, 2), (3, 3) \quad \text{ג.} \quad (1, 6) \quad \text{ב.} \quad (1, -1) \quad \text{א.} \quad \mathbf{(1)}$$

$$(0, 3, 0) \quad \mathbf{(2)}$$

$$(1, 2, 1) \quad \mathbf{(3)}$$

$$(0, 3, 0) \quad \mathbf{(4)}$$

$$(1, -3, 2, 2) \quad \mathbf{(5)}$$

$$\text{פתרון יחיד : } k=0, k=2, k=1 \text{ , 9 פתרונות : } k=1 \quad \mathbf{(6)}$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

$$\text{פתרון יחיד : } k=0, k=2, k=4, k=5 \text{ , 5 פתרונות : } k=3 \text{ , אין פתרון : } k=1 \quad \mathbf{(7)}$$

אין אופציה של אינסוף פתרונות.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(8)}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{(9)}$$

$$k=0, k=2, k=4 \quad \mathbf{(10)}$$

$$\text{עבור } k=1, k=3 \text{ , הווקטורים תלויים ליניארית,} \quad \mathbf{(11)}$$

ועבור $k=0, k=2, k=4, k=5, k=6$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

$$B_U = \{(4, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0)\} \text{ , מספר האיברים : } 25 \quad \mathbf{(12)}$$

$$B_W = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2)\} \text{ , מספר האיברים : } 25$$

$$B_{U+W} = \{(1, 1, 4, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 4, 0)\} \text{ , מספר האיברים : } 125$$

$$B_{U \cap W} = \{(2, 4, 2, 1)\} \text{ , מספר האיברים : } 5$$

(13) ההעתקה הבאה :

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{א.} \quad [T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב.} \quad \dim \text{Im} T = 2 \quad \text{ג.} \quad B_{\text{Im} T} = \{x + x^3, x^2 + 2x^3\}, \quad 25; \quad \mathbf{(14)}$$

$$\text{ג.} \quad \dim \text{Ker} T = 1 \quad B_{\text{Ker} T} = \{9 - 3x + x^2\}, \quad 5$$