# אלגברה לינארית

## פרק 12 - שדה השאריות מודולו p

### תוכן העניינים

1. שדה השאריות מודולו p . . . . . 1

# שדות – שדה השאריות מודולו p

**1)** נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$.

ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_7$.

ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_5$.

ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות $\mathbb{Z}_3$.

**2)** פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

**3)** פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x+y+4z=3 \\ 4x+3y+3z=4 \\ 2x+4z=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

**4)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+x_3=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

**5)** פתרו את המערכת $\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

**6)** נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר $k$, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases}$, מעל $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר $k$, למערכת:

א. פתרון יחיד ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

**8)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

חשבו את $A^{-1}$.

**9)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_3$.

חשבו את $A^{-1}$.

**10)** נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -7 & k^2+3\\ 3 & -1 & k+3\end{pmatrix}$, מעל $\mathbb{Z}_5$.

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר $k$, המטריצה הפיכה.

**11)** נתונה הקבוצה הבאה מעל $\mathbb{Z}_7$:

$$\{(k,1,1,1,1),(1,k,1,1,1),(1,1,k,1,1),(1,1,1,k,1),(1,1,1,1,k),\}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר $k$, הקבוצה תלויה ליניארית,
ועבור אילו ערכים של הפרמטר $k$, הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

**12)** במרחב $(Z_5)^4$, מעל השדה $Z_5$, נגדיר שני תתי-מרחבים, $U$ ו- $W$:

$$U=\{(x,y,z,t)\,|\,3x+4y+z+t=0,\ 2x+y+2t=0\}$$

$$W=sp\{(2,3,0,4),\ (1,1,4,1)\}$$

מצאו בסיס לתתי המרחבים $U\cap W$, $U+W$, $U, W$.

מה מספר האיברים בכל מרחב?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** הציגו דוגמה של העתקה לינארית $T:M_2\left[\mathbb{Z}_5\right]\to M_2\left[\mathbb{Z}_5\right]$,
המקיימת את התנאים הבאים:

1. $\{0\}\neq \mathrm{Ker}(T)\subset \mathrm{Im}(T)$
2. $\mathrm{Ker}(T)\neq \mathrm{Im}(T)$
3. $T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

מספיק להגדיר את ההעתקה על הווקטורים של בסיס שתבחרו.

**14)** נתונה העתקה לינארית $T:P_2\left[\mathbb{Z}_5\right]\to P_3\left[\mathbb{Z}_5\right]$,
המוגדרת על ידי $T\left(p(x)\right)=\left(x+\overline{3}\right)p(x)+p\left(\overline{0}\right)\left(x^3+\overline{2}\right)$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה $T$,
מהבסיס $E_1=\left\{\overline{1},x,x^2\right\}$ לבסיס $E_2=\left\{\overline{1},x,x^2,x^3\right\}$.

ב. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Im}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד ל-$\mathrm{Ker}(T)$.
כמה איברים יש ב-$\mathrm{Ker}(T)$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $(1,-1)$ ב. $(1,6)$ ג. $(2,1),\ (4,0),\ (0,2),\ (3,3)$ ד. $(1,2)$

**2)** $(0,3,0)$

**3)** $(1,2,1)$

**4)** $(0,3,0)$

**5)** $(1,-3,2,2)$

**6)** פתרון יחיד: $k=2,\ k=0$, 9 פתרונות: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

**7)** פתרון יחיד: $k=4,\ k=2,\ k=0$, 5 פתרונות: $k=3$, אין פתרון: $k=1$.
אין אופציה של אינסוף פתרונות.

**8)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

**9)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

**10)** $k=4,\ k=2,\ k=0$

**11)** עבור $k=3,\ k=1$, הווקטורים תלויים ליניארית,
ועבור $k=6,\ k=5,\ k=4,\ k=2,\ k=0$, הווקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

**12)** $B_U=\{(4,0,2,1),\ (2,1,0,0)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_W=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2)\}$, מספר האיברים: 25.

$B_{U+W}=\{(1,1,4,1),\ (0,1,2,2),\ (0,0,4,0)\}$, מספר האיברים: 125.

$B_{U\cap W}=\{(2,4,2,1)\}$, מספר האיברים: 5.

**13)** ההעתקה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

**14)** א. $[T]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ב. $\dim \operatorname{Im} T=2$, $B_{\operatorname{Im} T}=\{x+x^3,\ x^2+2x^3\}$; 25

ג. $\dim KerT=1$, $B_{KerT}=\{9-3x+x^2\}$, 5.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©