

אלgebra א

פרק 3 - שדה השאריות מודולו ק

תוכן העניינים

- 1 1. שדה השאריות מודולו ק

שדות – שדה השאריות מודולו d

1) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

- .א. פתרו את המערכת מעל שדה המספרים ממשיים \mathbb{R} .
- .ב. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_7 .
- .ג. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_5 .
- .ד. פתרו את המערכת מעל שדה השאריות \mathbb{Z}_3 .

2) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$

3) פתרו את המערכת $\begin{cases} 3x + y + 4z = 3 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$

4) פתרו את המערכת $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

5) פתרו את המערכת $\begin{cases} x + 4y + 2z + 4t = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ y + z + t = 1 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{cases}$

6) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

- מצאו עבור אילו ערכים של הפרמטר k , המערכת :
- .א. פתרון יחיד
 - .ב. אין פתרון
 - .ג. אינסוף פתרונות

7) נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{cases}$
 מעל \mathbb{Z}_5 .
 מצאו עבור אילו ערכי k המערכת:

- א. פתרון ייחודי ב. אין פתרון ג. אינסוף פתרונות

8) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, מעל \mathbb{Z}_5 .
 חשבו את A^{-1} .

9) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, מעל \mathbb{Z}_3 .
 חשבו את A^{-1} .

10) נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$, מעל \mathbb{Z}_5 .
 מצאו עבור אילו ערכי k המטריצה הפיכה.

11) נתונה הקבוצה הבאה מעל \mathbb{Z}_7 :
 $\{(k,1,1,1,1), (1,k,1,1,1), (1,1,k,1,1), (1,1,1,k,1), (1,1,1,1,k)\}$
 מצאו עבור אילו ערכי k , הקבוצה תלולה ליניארית,
 ועבור אילו ערכי k , הקבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

12) במרחב $(\mathbb{Z}_5)^4$, מעל השדה \mathbb{Z}_5 , נגדיר שני תת-מרחבים, U ו- W :
 $U = \{(x, y, z, t) | 3x + 4y + z + t = 0, 2x + y + 2t = 0\}$
 $W = sp\{(2, 3, 0, 4), (1, 1, 4, 1)\}$
 מצאו בסיס ל תת-המרחבים $U + W$, $U \cap W$
 מה מספר האיברים בכל מרחב?

13) הציגו דוגמה של העתקה ליניארית $T : M_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow M_2[\mathbb{Z}_5]$

המקיימת את התנאים הבאים :

$$\{0\} \neq \text{Ker}(T) \subset \text{Im}(T) .1$$

$$\text{Ker}(T) \neq \text{Im}(T) .2$$

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .3$$

מספיק להגדיר את העתקה על הוקטורים של בסיס שתבחרו.

14) נתונה העתקה ליניארית $T : P_2[\mathbb{Z}_5] \rightarrow P_3[\mathbb{Z}_5]$

$$T(p(x)) = (x + \bar{3})p(x) + p(\bar{0})(x^3 + \bar{2})$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת את העתקה T ,

$$E_2 = \{\bar{1}, x, x^2, x^3\} \quad E_1 = \{\bar{1}, x, x^2\}$$
 לבסיס

ב. מצאו בסיס ומימד $\text{Im}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Im}(T)$?

ג. מצאו בסיס ומימד $\text{Ker}(T)$.

כמה איברים יש ב- $\text{Ker}(T)$?

תשובות סופיות

(1,2) .**7**

(2,1), (4,0), (0,2), (3,3) .**8**

(1,6) .**9**

(1,-1) .**10**

(0,3,0) .**11**

(1,2,1) .**12**

(0,3,0) .**13**

(1,-3,2,2) .**14**

6 פתרון ייחיד : $k = 1, k = 0, k = 2$: 9 פתרונות .

אין אופציה של אינסוף פתרונות ואין אופציה של אין פתרון.

7 פתרון ייחיד : $k = 1, k = 0, k = 2, k = 4$: 5 פתרונות , אין פתרון :

אין אופציה של אינסוף פתרונות.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

10 $k = 0, k = 2, k = 4$

11 עבר $k = 1, k = 3$, הוקטורים תלויים ליניארית,
ועבר $k = 0, k = 2, k = 4, k = 5, k = 6$, הוקטורים בלתי-תלויים ליניארית.

.25 , $B_U = \{(4,0,2,1), (2,1,0,0)\}$ **12**

.25 , $B_W = \{(1,1,4,1), (0,1,2,2)\}$

.125 , $B_{U+W} = \{(1,1,4,1), (0,1,2,2), (0,0,4,0)\}$

.5 , $B_{U \cap W} = \{(2,4,2,1)\}$

13 ההעתקה הבאה :

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

; 25 , $B_{\text{Im } T} = \{x + x^3, x^2 + 2x^3\}$, $\dim \text{Im } T = 2$.**9** $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**10**

.5 , $B_{\text{Ker } T} = \{9 - 3x + x^2\}$, $\dim \text{Ker } T = 1$.**11**