

פונקציות מרוכבות

פרק 13 - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

(1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0) = \{|z| < 1\}$ כך ש- $|f(z)| = \ln(2 + |z|)$ לכל $z \in B_1(0)$?

(2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < \infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R > 0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi R^\alpha$. הוכיחו כי: $f(z) = 0$ בטבעת.

(3) יהי $|a| < 1$. כמה פתרונות יש למשוואה: $e^{z+2} = \left(\frac{z-a}{1-\bar{a} \cdot z}\right)^{2020}$ ב- $B_1(0)$?

(4) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(5) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^z - i}{e^z + i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \text{Im}(z) < \pi\}$.

(6) נניח כי: $f = u + iv$ שלמה כך ש- $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(7) הוכיחו כי לכל $R > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ למשוואה: $1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} = 0$ אין פתרון ב- $B_R(0)$.

(8) הוכח / הפרך :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0 \text{ ו-} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \text{ ש-כך } 0 \neq a_n \in \mathbb{C}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קיימת סדרה:}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}.$$

$$(9) \text{ הוכיחו כי לכל } t \in \mathbb{R} \text{ מתקיים: } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$$

$$(10) \text{ נניח כי } f(z) \text{ אנליטית ב-} B_1(0). \text{ הוכיחו כי קיים } n \in \mathbb{N} \text{ כך ש-} \frac{1}{n+2} \neq f\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$(11) \text{ חשבו את האינטגרל: } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1}$$

(12) הוכח / הפרך :

$$\text{קיימת פונקציה שלמה } f(z) \text{ כך ש-} |z^2 \cdot f(z) + e^z| \leq 1 \text{ לכל } |z| < 1.$$

(13) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 2$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים:

$$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0. \text{ הוכיחו כי } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \text{ קיים וסופי.}$$

(14) הוכח / הפרך :

$$\text{קיימת פונקציה שלמה } f(z) \text{ כך ש-} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} \text{ לכל } n \in \mathbb{N}.$$

(15) האם קיימת f שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}, x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}, x < 0 \end{cases}$$

16) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי: $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |\operatorname{Log}(z)| = \infty$

ב. הראו כי: $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |z \cdot \operatorname{Log}(z)| = 0$

ג. האם הפונקציה: $f(z) = \begin{cases} z \cdot \operatorname{Log}(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ אנליטית ב- $z=0$?

17) חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

18) פתחו את הפונקציה: $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4}$ לטור לורן בטבעת $0 < |z-i| < 2$.

19) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 1$ וזוגית (כלומר: $f(z) = f(-z)$).

חשבו: $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$

20) נניח כי: $f(z): B_2(0) \rightarrow \mathbb{C}$ אנליטית ונניח כי בתחום: $U = \{1 < |z| < 2\}$ היא

חח"ע. הוכיחו כי $f(z)$ חח"ע ב- $B_2(0)$.

רמז: המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט.

21) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq \frac{1}{n}$$

22) תהי: $h(z) = z^2 - 4 - e^{-3z}$. מצאו את מספר האפסים של $h(z)$ בחצי המישור

הימני: $\operatorname{Re}(z) > 0$.

23) מצאו את התמונה של הרביע הראשון: $A = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ תחת

ההעתקה: $f(z) = \frac{(1+z^2) - i(1-z^2)}{(1+z^2) + i(1-z^2)}$

(24) יהי: $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ פולינום מתוקן. $n \in \mathbb{N}$.
הוכיחו כי כל שורשי הפולינום נמצאים בעיגול:

$$|z| < \sqrt{1 + |a_{n-1}|^2 + \dots + |a_1|^2 + |a_0|^2}$$

רמז: אי שוויון קושי שוורץ: $\left| \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k \bar{b}_k \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{k=n-1} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^{k=n-1} |b_k|^2 \right)}$

(25) תהי: $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.

נניח כי: $f^2(z)$ ו- $f^3(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$.

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$.

(26) הוכח / הפרך:

אם: $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$ ו- $f^6(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$.

(27) חשבו את האינטגרל: $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{e^z - 1} dz$

(28) חשבו את האינטגרל: $\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2} \cos\left(e^{\frac{1}{z}}\right)}{z-2} dz$

(29) נסמן: $f(z) = \tan(z)$ ו- $A = \left\{ z \in \mathbb{C}, -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re}(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$. מצאו את $f[A]$.

(30) נניח כי: $f(z) = u + iv$ אנליטית ב- $B_1(0)$ וכי: $|u(x, y)| + |v(x, y)| = 1$ ב- $B_1(0)$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) הוכחה.

(3) אין פתרונות.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

(9) הוכחה.

(10) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (11)$$

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

(14) הוכחה.

(15) לא קיימת.

(16) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (18)$$

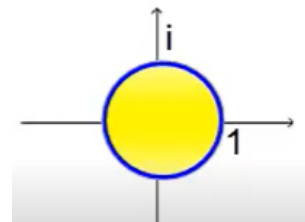
$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (19)$$

(20) הוכחה.

(21) הוכחה.

(22) 1.

(23) להלן רביע ראשון:



(24) הוכחה.

(25) הוכחה.

(26) הוכחה.

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \frac{1}{e^z - 1} dz = 2\pi i \quad (27)$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z^2} \cos\left(\frac{1}{e^z}\right)}{z-2} dz = -\frac{\pi i}{2} \cos(\sqrt{e}) \quad (28)$$

(29) ראו סרטון.

(30) הוכחה.