

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 6 - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

$$\begin{aligned} u_x + u_y &= u & x, y > 0 \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} & u(0, y) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < \infty & \quad t > 1 \\ u(x, 0) = f(x) &= 0 & u_t(x, 0) = g(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u_x + 2u_y &= u & 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0 \\ u(x, x^2) &= x + \sin(x^3) & x < 0 \end{aligned} \quad (3) \quad \text{פתרו את המשוואה}$$

(4) נתון כי $u(x, t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= u_{xx} + Ax & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= 2 & u_x(1, t) = 1 \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

$$\begin{aligned} \Delta u &= r & 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) &= 1 + \sin \theta & \text{פתרו את הבעיה הבאה:} \\ u(2, \theta) &= 1 + 2 \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_x + u_y + u &= (2x + 1)e^{x^2} & y \geq e^{-x} \\ u(x, e^{-x}) &= e^{x^2} + e^{-x} \end{aligned} \quad (6) \quad \text{פתרו את המשוואה:}$$

7 נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t > 0$ $0 < x < 1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x, 0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0, t) = (1, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו: } u\left(\frac{1}{2}, 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$$

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x, t) = u(x, t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

8 עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

$$9 \text{ פתרו את הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

$$10 \text{ נתונה משוואת הגלים הבאה: } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x, 1)$.

$$11 \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$$

חשבו את $u(0, 0)$.

$$12 \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x) \end{cases}$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019} - 2 + x)$$

הוכיחו כי לכל $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x, y) < 2019$.

13) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x, y > 0$.

$$x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

14) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta \cdot u_t + F(x, t) & 0 < x < L, \quad t > 0, \quad \beta > 0 \\ u_x(0, t) = A(t) & u_x(L, t) = B(t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{רמז: הגדירו } E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t)) dx$$

15) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

16) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$, בתחום $y > 0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

17) פתרו את הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

18) נתונה הבעיה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx$$

$$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

(19) $u(x, t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$u(x, 0) = h(x) = \frac{e^{-x} + 2e^x}{e^{-x} + e^x}$$

חשבו $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_x(0, t) \sqrt{t}}{u(0, t)}$

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}x} \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

(20) נתונה הבעיה הבאה:

חשבו $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{4} + \pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x, t) dx$

(21) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2 \sin(x) u_{xy} - \cos^2(x) u_{yy} - \cos(x) u_y = 0$$