

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 01 88241

פרק 10 - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

$$\begin{aligned}
 &u_x + u_y = u \quad x, y > 0 \\
 &u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \quad u(0, y) = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < \infty \quad t > 1 \\
 &u(x, 0) = f(x) = 0 \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u_x + 2u_y = u \quad 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0 \\
 &u(x, x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

פתרו את המשוואה

(4) נתון כי $u(x, t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned}
 &u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\
 &u_x(0, t) = 2 \quad u_x(1, t) = 1 \\
 &u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0
 \end{aligned}$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

$$\begin{aligned}
 &\Delta u = r \quad 1 < r < 2 \\
 &u(1, \theta) = 1 + \sin \theta \quad (5) \quad \text{פתרו את הבעיה הבאה:} \\
 &u(2, \theta) = 1 + 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &u_x + u_y + u = (2x + 1)e^{x^2} \quad y \geq e^{-x} \\
 &u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x} \quad (6) \quad \text{פתרו את המשוואה:}
 \end{aligned}$$

(7) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t > 0$ $0 < x < 1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x, 0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו: } u\left(\frac{1}{2}, 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$$

רמוז: הגדירו את הפונקציה $h(x, t) = u(x, t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

(8) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

$$(9) \text{ פתרו את הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

$$(10) \text{ נתונה משוואת הגלים הבאה: } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x, 1)$.

$$(11) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$$

חשבו את $u(0, 0)$.

$$(12) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x) \end{cases}$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019} - 2 + x)$$

הוכיחו כי לכל $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x, y) < 2019$.

13 מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x, y > 0$.

$$x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

14 השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta \cdot u_t + F(x, t) & 0 < x < L, t > 0, \beta > 0 \\ u_x(0, t) = A(t) & u_x(L, t) = B(t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{רמז: הגדירו } E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t) dx$$

15 פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

16 נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$, בתחום $y > 0$.

- א. הראו כי המשוואה אליפטית.
 ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

17 פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

18 נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx$$

$$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = h(x) = \frac{e^{-x} + 2e^x}{e^{-x} + e^x} \quad (19) \quad \text{הוא פתרון של הבעיה:}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_x(0, t) \sqrt{t}}{u(0, t)}$$

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (20) \quad \text{נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{4} + \pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x, t) dx$$

(21) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2 \sin(x) u_{xy} - \cos^2(x) u_{yy} - \cos(x) u_y = 0$$