

# פונקציות מרוכבות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

## שאלות מסכמות ברמת בחינה:

### שאלות:

(1) האם קיימת  $f$  אנליטית ב-  $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$  כך ש-  $|f(z)| = \ln(2 + |z|)$  לכל  $z \in B_1(0)$ ?

(2) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < \infty$  ונניח כי קיים מספר  $\alpha$  ממשי שאינו שלם כך שלכל  $R > 0$  מתקיים:  $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi R^\alpha$ . הוכיחו כי:  $f(z) = 0$  בטבעת.

(3) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה  $f(z)$  אנליטית ב-  $B_{1+\varepsilon}(0)$  כך ש-  $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(4) הראו כי הטור:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^z - i}{e^z + i} \right)^n$  מתכנס בהחלט ברצועה:  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ .

(5) נניח כי:  $f = u + iv$  שלמה כך ש-  $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$ . הוכיחו כי  $f(z)$  קבועה.

(6) הוכח / הפרך:

קיימת סדרה:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \neq 0$  כך ש-  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

(7) הוכיחו כי לכל  $t \in \mathbb{R}$  מתקיים:  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$ .

(8) נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש- $\frac{1}{n+2} \neq f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

(9) חשבו את האינטגרל:  $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$ .

(10) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה  $f(z)$  כך ש- $|z^2 \cdot f(z) + e^z| \leq 1$  לכל  $|z| < 1$ .

(11) נניח כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 2$  כך שלכל  $n \geq 0$  מתקיים:

$$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0 \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \text{ קיים וסופי.}$$

(12) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה  $f(z)$  כך ש- $\frac{(-1)^n}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ .

(13) האם קיימת  $f$  שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}, x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}, x < 0 \end{cases}$$

(14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |\operatorname{Log}(z)| = \infty$

ב. הראו כי:  $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |z \cdot \operatorname{Log}(z)| = 0$

ג. האם הפונקציה:  $f(z) = \begin{cases} z \cdot \operatorname{Log}(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$  אנליטית ב- $z=0$ ?

(15) חשבו את האינטגרל:  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

(16) פתחו את הפונקציה:  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4}$  לטור לורן בטבעת  $0 < |z-i| < 2$ .

**17** נתון כי  $f(z)$  אנליטית בטבעת  $0 < |z| < 1$  וזוגית (כלומר:  $f(z) = f(-z)$ ).

חשבו:  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$ .

**18** נניח כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ . הוכיחו כי קיים  $n \in \mathbb{N}$  כך ש-

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq \frac{1}{n}$$

**19** תהי:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה.

נניח כי:  $f^2(z)$  ו- $f^3(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$ .

הוכיחו כי  $f(z)$  אנליטית ב- $B_1(0)$ .

**20** הוכח / הפרד:

אם:  $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$  ו- $f^6(z)$  אנליטיות ב- $B_1(0)$

אז  $f(z)$  בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$ .

## תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (9)$$

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) לא קיימת.

(14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (16)$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (17)$$

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

(20) הוכחה.