פונקציות מרוכבות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0)=\{|z|<1\}$ כך ש- $|f(z)|=\ln(2+|z|)$ לכל $z\in B_1(0)$?

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<\infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R>0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi}\left|f\left(\mathrm{R}e^{i\theta}\right)\right|d\theta\le 2\pi R^{\alpha}$.
הוכיחו כי: $f(z)=0$ בטבעת.

3) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^z-i}{e^z+i}\right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה:
$U=\{z\in\mathbb{C}|0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$.

4) נניח כי: $f=u+iv$ שלמה כך ש- $v(x,y)=\cosh[u(x,y)]$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

5) הוכיחו כי לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2t\cos(\theta)}d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n!)^2}$.

6) חשבו את האינטגרל: $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}$.

7) הוכח / הפרך:
קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש- $|z^2\cdot f(z)+e^z|\le 1$ לכל $|z|<1$.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<2$ כך שלכל $n\ge 0$ מתקיים:
$\oint_{|z|=1}z^n f(z)dz=0$. הוכיחו כי $\lim_{z\to 0}f(z)$ קיים וסופי.

9) האם קיימת f שלמה המקיימת:

$$f(x)=\begin{cases} x^4 & x\in\mathbb{R}\ ,\ x>0 \\ -x^4 & x\in\mathbb{R}\ ,\ x<0 \end{cases}\ .$$

10) הראו כי: $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} \left|Log(z)\right|=\infty$.

11) הראו כי: $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]}} \left|z\cdot Log(z)\right|=0$.

12) האם הפונקציה: $f(z)=\begin{cases} z\cdot Log(z) & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ אנליטית ב- $z=0$?

13) חשבו את האינטגרל: $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$.

14) פתחו את הפונקציה: $f(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^4}$ לטור לורן בטבעת $0<|z-i|<2$.

15) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z|<1$ וזוגית (כלומר: $f(z)=f(-z)$).
חשבו: $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)dz$.

16) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-
$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right)\neq\frac{1}{n}$.

תשובות סופיות:

1) לא.
2) הוכחה.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$.
7) הוכחה.
8) הוכחה.
9) לא קיימת.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) לא.
13) $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
14) $a_k=\begin{cases}(-1)^{k+4}\frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k\ge -4\\ 0 & k\le -5\end{cases}$.
15) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]=0$.
16) הוכחה.