משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x+u_y=u \qquad x,y>0$$
$$u(x.0)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & 0<x<1\end{cases} \qquad u(0,y)=0$$

2)
$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\triangle u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta.$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta$$

4) פתרו את המשוואה:
$$u_x+u_y+u=(2x+1)e^{x^2} \qquad y\ge e^{-x}$$
$$u(x,e^{-x})=e^{x^2}+e^{-x}.$$

5) נתונה הבעיה $\begin{cases}u_t=u_{xx}+4u_x+4u\\ u(x,0)=x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e}\\ u(0,t)=(1,t)=0\end{cases}$, בתחום $0<x<1,\ \ t>0$:

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right)<\frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t)=u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

6) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:
$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+10u & 0<x<1,\ t>0\\ u(x,0)=h(x) & \\ u(0,t)=0 & u(1,t)=0\end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$ קיים וסופי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

7) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u = x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = 1+x\end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

8) נתונה משוואת הגלים הבאה: $u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$

$u(x,0)=1$.

$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

9) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u\big|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y)\end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

$\triangle u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$

10) נתונה הבעיה הבאה: $u\big|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$.

$u\big|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019}-2+x\right)$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

11) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2 ulxx + 2xy\cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

12) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases}u_{tt}+\beta\cdot u_t + F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\,dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

13) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$

14) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$, בתחום $y > 0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

15) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0,t) = e^{-t} - 1 \\ u(x,0) = 1 \qquad u_t(x,0) = 2\sin(x) - 1 \end{cases}$$

16) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 \qquad u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty} \int_0^1 u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\,dx$.

17) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

18) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} \\ u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

19) פתרו את המשוואה

$$\begin{cases} u_x + 2u_y = u & 1+y-2x>0,\ \ x<0 \\ u\left(x,x^2\right) = x+\sin\left(x^3\right) & x<0 \end{cases}$$

20) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1 & \\ u(x,0) = x & \end{cases}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

21) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u = 1 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta) & \end{cases}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r\to 0+} \dfrac{u(r,\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{4}$?

22) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \triangle u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) & \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

23) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה: $\begin{cases} \triangle u_n = \left(\dfrac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) & \end{cases}$.

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

24) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b>0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0<x<1 \\ u(x,0) = h(x) & \\ v_x(0,t) - b\cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b\cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

25) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 & \end{cases}.$$

26) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) & \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1\cdot\frac{x}{\pi}$.

27) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = t & \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

28) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \ t>0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0 & \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2\,dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

29) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u=0 & x^2+y^2<1\\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1}=x^2+xy+y^2\end{cases}$.

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy=\frac{7\pi}{4}$?

30) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}u_t=u_{xx} & 0<x<3\ ,\ t>0\\ u(0,t)=\frac{3}{\sqrt{1+t^2}} \qquad u(3,t)=3\\ u(x,0)=3+3x-x^2\end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right)<2e$.

31) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}u_t=u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0\\ u(0,t)=\arctan(t) \qquad u(\pi,t)=0\\ u(x,0)=x(x-\pi)\end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right)>-\frac{\pi^2}{4}$.

32) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty\ ,\ t>0\\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} \qquad u_t(x,0)=g(x)=0\\ u_x(0,t)=0\end{cases}$$

חשבו $\int\limits_0^2\left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$.

33) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\triangle u=r & 0\le r<1\\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta)\end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com