משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$
$$u(x.0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0, y) = 0$$

2)
$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty \qquad t > 1$$
$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

3) פתרו את המשוואה
$$u_x + 2u_y = u \qquad 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0$$
$$u(x, x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0$$

4) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:
$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

5) פתרו את הבעיה הבאה:
$$\Delta u = r \qquad 1 < r < 2$$
$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$
$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

6) פתרו את המשוואה:
$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$
$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

7) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $\quad 0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

8) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

9) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1 + x & \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

10) נתונה משוואת הגלים הבאה :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad t>0$$

$$u(x,0) = 1 .$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

11) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{matrix} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) & \end{matrix}$.

חשבו את $u(0,0)$.

12) נתונה הבעיה הבאה :

$$\Delta u = 0 \qquad 1 < x^2 + y^2 < 4$$

$$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x) .$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019} - 2 + x\right)$$

הוכיחו כי לכל $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x,y) < 2019$.

13) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

14) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) & \\ u_t(x,0)=g(x) & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

15) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x & \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 & \end{cases}$$

16) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

17) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 & \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

18) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ \ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) & \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

19) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = h(x) = \dfrac{e^{-x} + 2e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} & \end{array}.$$

חשבו $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\lim\limits_{t \to \infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$