משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

1) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-\cos^2(x)u_{yy}-\cos(x)u_y=0$$

2) נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0)=1.$$
$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

3) פתרו את הבעיה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\triangle u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta.$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta$$

5) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+4u_x+4u\\ u(x,0)=x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e}\\ u(0,t)=(1,t)=0\end{cases}$$

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right)<\frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t)=u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

6) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}\triangle u=x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1\\ u|_{x^2+y^2=1}=1+x\end{cases}.$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

7) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ \ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) & \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$.

8) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 & \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

9) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

10) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u=0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1}=\cosh(x)\sinh(y) & \end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\triangle u=0 \qquad 1<x^2+y^2<4$$
$$u|_{x^2+y^2=1}=\ln(2+x)$$
$$u|_{x^2+y^2=4}=\ln(e^{2019}-2+x)$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) & \\ u_t(x,0)=g(x) & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\,dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x & \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 & \end{cases}$$

15) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+\cos(\pi x) & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 & \\ u(x,0)=x & \end{cases}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t)=u(x,t)-x$.

16) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u=1 & 0\le r<1 \\ u(1,\theta)=c+\sin(2020\cdot\theta) & \end{cases}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim_{r\to 0+}\frac{u(r,\theta)}{r^2}=\frac{1}{4}$?

17) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \triangle u=r^2 & 0\le r<1 \\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta) & 0\le\theta<2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle v=r^2 & 0\le r<1 \\ v(1,\theta)=\cos^{2020}(\theta) & \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0)>v(0,0)$.

18) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} \triangle u_n=\left(\frac{r}{2}\right)^n & 0\le r<1 \\ u_n(1,\theta)=\sin(\theta) & \end{cases}.$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

19) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b>0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0<x<1 \\ u(x,0) = h(x) & \\ v_x(0,t) - b\cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b\cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

20) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 & \end{cases}.$$

21) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) & \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1\cdot\frac{x}{\pi}$.

22) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = t & \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

23) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+\cos(x) & -\infty<x<\infty,\ \ t>0 \\ u(x,0)=\cos(x)+\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2}\left|u(x,3)\right|^2 dx$.

24) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \triangle u=0 & x^2+y^2<1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1}=x^2+xy+y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy=\frac{7\pi}{4}$?

25) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0<x<3\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=\dfrac{3}{\sqrt{1+t^2}} \qquad u(3,t)=3 \\ u(x,0)=3+3x-x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right)<2e$.

26) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=\arctan(t) \qquad u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right)>-\frac{\pi^2}{4}$.

27) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<\infty\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases}1-x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & x>1\end{cases} \qquad u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_{0}^{2}\left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

28) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases}\Delta u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta)\end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com