

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 10 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

(1) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה :

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

(2) נתונה משוואת הגלים הבאה :

$$u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x, 1)$.

(3) פתרו את הבעיה :

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < \infty \quad t > 1$$

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

(4) פתרו את הבעיה הבאה :

$$\Delta u = r \quad 1 < r < 2$$

$$u(1, \theta) = 1 + \sin \theta$$

$$u(2, \theta) = 1 + 2 \cos \theta$$

(5) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $0 < x < 1$, $t > 0$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x, 0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0, t) = (1, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו : } u\left(\frac{1}{2}, 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$$

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x, t) = u(x, t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

(6) פתרו את הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

(7) נתונה הבעיה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx$$

חשבו .

(8) פתרו את הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

(9) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$, בתחום $y > 0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x) \sinh(y) \end{cases}$$

(10) נתונה הבעיה הבאה :

חשבו את $u(0, 0)$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x) \\ u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019} - 2 + x) \end{cases}$$

(11) נתונה הבעיה הבאה :

הוכיחו כי לכל $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x, y) < 2019$.(12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x, y > 0$.

$$x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

13 השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta \cdot u_t + F(x, t) & 0 < x < L, \quad t > 0, \quad \beta > 0 \\ u_x(0, t) = A(t) & u_x(L, t) = B(t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

רמז : הגדירו $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t) dx$

14 פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \cos(\pi x) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 1 \\ u(x, 0) &= x \end{aligned}$$

15 פתרו את הבעיה הבאה :

רמז : התבוננו בפונקציה $v(x, t) = u(x, t) - x$

16 נתון כי $u(r, \theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) &= c + \sin(2020 \cdot \theta) \end{aligned}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{u(r, \theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$?

17 נתונות הבעיות הבאות :

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ v(1, \theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0, 0) > v(0, 0)$

18 נתון כי $u_n(r, \theta)$ הוא פתרון של הבעיה :

$$\begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \leq r < 1 \\ u_n(1, \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

מצאו את $u_n(r, \theta)$ וחשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta)$.

(19) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x, t) & 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = h(x) \\ v_x(0, t) - b \cdot v(0, t) = f(t) & t \geq 0 \\ u_x(1, t) + b \cdot u(1, t) = g(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin(\pi x) & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0 \quad u(2, t) = 0 \end{cases} \quad (20) \text{ פתרו את הבעיה הבאה:}$$

(21) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3 \sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0, t) = t \quad u(\pi, t) = 1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x, t) = v(x, t) + t \frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) = t \end{cases} \quad (22) \text{ פתרו את הבעיה הבאה:}$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x, t) = u(x, t) - t$.

$$(23) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \int_{-2}^2 |u(x, 3)|^2 dx$$

$$(24) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

$$\text{האם ייתכן כי } \iint_{x^2+y^2 < 1} u(x, y) dx dy = \frac{7\pi}{4} ?$$

$$(25) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3, t) = 3 \\ u(x, 0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } u\left(\frac{3}{2}, 1\right) < 2e$$

$$(26) \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \arctan(t) & u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(x - \pi) \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$$

(27) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x, 0) = g(x) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \int_0^2 \left| u(x, 1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$$

$$\cdot \begin{cases} \Delta u = r & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases} \quad (28) \text{ נתונה הבעיה הבאה:}$$

חשבו $u(0,0)$.