# משוואות דיפרנציאליות חלקיות

## פרק 9 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

# שאלות מסכמות ברמת בחינה

## שאלות

**1)** מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-\cos^2(x)u_{yy}-\cos(x)u_y=0$$

**2)** נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0)=1$$
$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

חשבו את $u(x,1)$.

**3)** פתרו את הבעיה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

**4)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\Delta u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta.$$

**5)** נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $\quad 0<x<1$ :

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+4u_x+4u\\ u(x,0)=x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e}\\ u(0,t)=(1,t)=0\end{cases}$$

הוכיחו: $u\left(\frac{1}{2},1\right)<\frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t)=u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע $\delta$ מתאים.

**6)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}\Delta u=x^2+y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1\\ u|_{x^2+y^2=1}=1+x\end{cases}.$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

7) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1,\ \ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) & \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$ .

8) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 & \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

9) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$ , בתחום $y>0$ .

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

10) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{matrix} \triangle u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) & \end{matrix}.$$

חשבו את $u(0,0)$ .

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{matrix} \triangle u = 0 & 1<x^2+y^2<4 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x) & \\ u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019}-2+x) & \end{matrix}.$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$ .

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$ .

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

**13)** השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

**14)** פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

**15)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} & u_t=u_{xx}+\cos(\pi x) \qquad 0<x<1\ ,\ t>0 \\ & u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 \\ & u(x,0)=x \end{aligned}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t)=u(x,t)-x$.

**16)** נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} & \Delta u=1 \qquad 0\le r<1 \\ & u(1,\theta)=c+\sin(2020\cdot\theta) \end{aligned}$$

עבור איזה קבוע $c$ מתקיים $\lim_{r\to 0+}\frac{u(r,\theta)}{r^2}=\frac{1}{4}$?

**17)** נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \Delta u=r^2 & 0\le r<1 \\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta) & 0\le\theta<2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v=r^2 & 0\le r<1 \\ v(1,\theta)=\cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0)>v(0,0)$.

**18)** נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} \Delta u_n=\left(\frac{r}{2}\right)^n & 0\le r<1 \\ u_n(1,\theta)=\sin(\theta) \end{cases}.$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

**19)** הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b>0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0<x<1 \\ u(x,0)=h(x) & \\ v_x(0,t)-b\cdot v(0,t)=f(t) & t\ge 0 \\ u_x(1,t)+b\cdot u(1,t)=g(t) & t\ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

**20)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=0 \qquad u(2,t)=0 & \end{cases}.$$

**21)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+3\sin(2x)+\dfrac{\pi-x}{\pi} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\dfrac{x}{\pi}+\sin(x) & \\ u(0,t)=t \qquad u(\pi,t)=1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t)=v(x,t)+t\dfrac{\pi-x}{\pi}+1\cdot\dfrac{x}{\pi}$.

**22)** פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+1+\sin(2\pi x) & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=u(1,t)=t & \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t)=u(x,t)-t$.

**23)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$.

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

**24)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$.

האם ייתכן כי $\iint_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$ ?

**25)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2}, 1\right) < 2e$.

**26)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \arctan(t) & u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}$.

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

**27)** נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$.

**28)** נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.