

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

$$\begin{aligned}
 u_x + u_y &= u & x, y > 0 \\
 u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} & u(0, y) = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} & 0 < x < \infty & \quad t > 1 \\
 u(x, 0) = f(x) = 0 & \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

(3) נתון כי $u(x, t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + u_t &= u_{xx} + Ax & 0 < x < 1, t > 0 \\
 u_x(0, t) &= 2 & u_x(1, t) &= 1 \\
 u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0
 \end{aligned}$$

נתון כי הגבול $U(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= r & 1 < r < 2 \\
 u(1, \theta) &= 1 + \sin \theta & \text{פתרו את הבעיה הבאה:} \quad (4) \\
 u(2, \theta) &= 1 + 2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_x + u_y + u &= (2x+1)e^{x^2} & y \geq e^{-x} \\
 u(x, e^{-x}) &= e^{x^2} + e^{-x} & \text{פתרו את המשוואה:} \quad (5)
 \end{aligned}$$

6 נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t > 0$ $0 < x < 1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x, 0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו: } u\left(\frac{1}{2}, 1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$$

רמו: הגדירו את הפונקציה $h(x, t) = u(x, t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7 עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ קיים וסופי.

$$8 \text{ פתרו את הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

$$9 \text{ נתונה משוואת הגלים הבאה: } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x, 1)$.

$$10 \text{ נתונה הבעיה הבאה: } \begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$$

חשבו את $u(0, 0)$.

$$\Delta u = 0 \quad 1 < x^2 + y^2 < 4$$

$$11 \text{ נתונה הבעיה הבאה: } u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$$

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln(e^{2019} - 2 + x)$$

הוכיחו כי לכל $1 < x^2 + y^2 < 4$ מתקיים $0 < u(x, y) < 2019$.

(12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x, y > 0$.

$$x^2 u_{xx} + 2xy \cdot u_{xy} + y^2 u_{yy} = 4x^2$$

(13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta \cdot u_t + F(x, t) & 0 < x < L, t > 0, \beta > 0 \\ u_x(0, t) = A(t) & u_x(L, t) = B(t) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{רמז: הגדירו } E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L w_t^2(x, t) + w_x^2(x, t) dx$$

(14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

(15) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 2yu_{yy} + u_y = 0$, בתחום $y > 0$.

- א. הראו כי המשוואה אליפטית.
 ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

(16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

(17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx$$

$$u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = h(x) = \frac{e^{-x} + 2e^x}{e^{-x} + e^x} \quad : \text{הוא פתרון של הבעיה: (18)}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_x(0, t) \sqrt{t}}{u(0, t)}$$

(19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2 \sin(x) u_{xy} - \cos^2(x) u_{yy} - \cos(x) u_y = 0$$

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = e^{\frac{1}{2}x} \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases} \quad : \text{נתונה הבעיה הבאה: (20)}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{4} + \pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x, t) dx$$

$$u_x + 2u_y = u \quad 1 + y - 2x > 0, \quad x < 0$$

$$u(x, x^2) = x + \sin(x^3) \quad x < 0 \quad : \text{פתרו את המשוואה (21)}$$

$$u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 1 \quad : \text{פתרו את הבעיה הבאה: (22)}$$

$$u(x, 0) = x$$

$$\text{רמז: } v(x, t) = u(x, t) - x \text{ התבוננו בפונקציה}$$

(23) נתון כי $u(r, \theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\Delta u = 1 \quad 0 \leq r < 1$$

$$u(1, \theta) = c + \sin(2020 \cdot \theta)$$

$$\text{עבור איזה קבוע } c \text{ מתקיים } ? \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r, \theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$$

(24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \Delta u = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = r^2 & 0 \leq r < 1 \\ v(1, \theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

$$(25) \text{ נתון כי } u_n(r, \theta) \text{ הוא פתרון של הבעיה: } \begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \leq r < 1 \\ u_n(1, \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

מצאו את $u_n(r, \theta)$ וחשבו $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta)$.(26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x, t) & 0 < x < 1 \\ u(x, 0) = h(x) \\ v_x(0, t) - b \cdot v(0, t) = f(t) & t \geq 0 \\ u_x(1, t) + b \cdot u(1, t) = g(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx$.

$$(27) \text{ פתרו את הבעיה הבאה: } \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin(\pi x) & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0 \quad u(2, t) = 0 \end{cases}$$

(28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3 \sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0, t) = t \quad u(\pi, t) = 1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x, t) = v(x, t) + t \frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) = t \end{cases} \quad (29) \text{ פתרו את הבעיה הבאה:}$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x, t) = u(x, t) - t$.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (30) \text{ נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{חשבו } \int_{-2}^2 |u(x, 3)|^2 dx$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases} \quad (31) \text{ נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{האם ייתכן כי } \iint_{x^2+y^2<1} u(x, y) dx dy = \frac{7\pi}{4} ?$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(0, t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3, t) = 3 \\ u(x, 0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases} \quad (32) \text{ נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{הוכיחו כי } u\left(\frac{3}{2}, 1\right) < 2e$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = \arctan(t) & u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(x - \pi) \end{cases} \quad (33) \text{ נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{הוכיחו כי } u\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$$

(34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x, 0) = g(x) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \int_0^2 \left| u(x, 1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$$

$$\begin{cases} \Delta u = r & 0 \leq r < 1 \\ u(1, \theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases} \quad \text{(35) נתונה הבעיה הבאה:}$$

$$\text{חשבו } u(0, 0).$$