משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 8 - שאלות מסכמות ברמת בחינה

תוכן העניינים

1. תרגילים 1

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

פתרו את הבעיות בשאלות 1-2:

1)
$$u_x+u_y=u \qquad x,y>0$$
$$u(x.0)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & 0<x<1\end{cases} \qquad u(0,y)=0$$

2)
$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$u_{tt}+u_t=u_{xx}+Ax \qquad 0<x<1,\ t>0$$
$$u_x(0,t)=2 \qquad u_x(1,t)=1$$
$$u(x,0)=u_t(x,0)=0$$

נתון כי הגבול $U(x)=\lim_{t\to\infty}u(x,t)$ קיים וסופי.

מצאו את הקבוע A ואת הפונקציה $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\Delta u=r \qquad 1<r<2$$
$$u(1,\theta)=1+\sin\theta$$
$$u(2,\theta)=1+2\cos\theta$$

5) פתרו את המשוואה:

$$u_x+u_y+u=(2x+1)e^{x^2} \qquad y\ge e^{-x}$$
$$u(x,e^{-x})=e^{x^2}+e^{-x}$$

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

6) נתונה הבעיה הבאה, בתחום $t>0$ $0<x<1$:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = (1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו : $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$.

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$, עבור קבוע δ מתאים.

7) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0<x<1,\ t>0 \\ u(x,0) = h(x) \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי.

8) פתרו את הבעיה הבאה : $\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

9) נתונה משוואת הגלים הבאה :

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$

$u(x,0) = 1$.

$$u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1-x^2 & -1<x<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

10) נתונה הבעיה הבאה : $\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2+y^2<1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = \cosh(x)\sinh(y) \end{cases}$.

חשבו את $u(0,0)$.

11) נתונה הבעיה הבאה :

$$\Delta u = 0 \qquad 1<x^2+y^2<4$$

$u|_{x^2+y^2=1} = \ln(2+x)$.

$$u|_{x^2+y^2=4} = \ln\left(e^{2019} - 2 + x\right)$$

הוכיחו כי לכל $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$.

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה, בתחום $x,y>0$.

$$x^2ulxx+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידת הפתרון לבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t+F(x,t) & 0<x<L,\ t>0,\ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) & u_x(L,t)=B(t) \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

רמז: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)dx$.

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$, בתחום $y>0$.

א. הראו כי המשוואה אליפטית.

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית.

16) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 \\ u(x,0)=1 & u_t(x,0)=2\sin(x)-1 \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)dx$.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

18) $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} && -\infty < x < \infty,\ \ t > 0 \\ &u(x,0) = h(x) = \frac{e^{-x}+2e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} \end{aligned}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$.

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה:

$$u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos^2(x)u_{yy} - \cos(x)u_y = 0$$

20) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx} & 0 < x < 1,\ \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{1}{2}x} & \\ u(0,t) = 0 & u(1,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x} u_t(x,t)\,dx$.

21) פתרו את המשוואה

$$\begin{aligned} &u_x + 2u_y = u && 1 + y - 2x > 0,\ \ x < 0 \\ &u(x,x^2) = x + \sin(x^3) && x < 0 \end{aligned}$$

22) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) && 0 < x < 1\ ,\ t > 0 \\ &u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1 \\ &u(x,0) = x \end{aligned}$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$.

23) נתון כי $u(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &\triangle u = 1 && 0 \le r < 1 \\ &u(1,\theta) = c + \sin(2020\cdot\theta) \end{aligned}$$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r\to 0+} \frac{u(r,\theta)}{r^2} = \frac{1}{4}$?

24) נתונות הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} \triangle v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$.

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה:

$$\begin{cases} \triangle u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) \end{cases}.$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n\to\infty} u_n(r,\theta)$.

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה, עבור $b > 0$.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = h(x) \\ v_x(0,t) - b \cdot v(0,t) = f(t) & t \ge 0 \\ u_x(1,t) + b \cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינטגרל האנרגיה $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$.

27) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(2,t) = 0 \end{cases}.$$

28) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi}$.

29) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = t \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$.

30) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}.$$

חשבו $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$.

31) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}.$$

האם ייתכן כי $\iint_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \dfrac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2},1\right) < 2e$.

33) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \arctan(t) & u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) \end{cases}.$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$.

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$.

35) נתונה הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = r & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) \end{cases}$.

חשבו $u(0,0)$.