

# משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - שאלות מסכמות במשוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

## שאלות מסכמות ברמת בחינה

### שאלות

$$\begin{aligned}
 & u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < \infty \quad t > 1 \\
 & (1) \quad \text{פתרו את הבעיה: } 0 \leq x < 1: \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \\
 & \quad u(x, 0) = f(x) = 0
 \end{aligned}$$

(2) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = h(x) \\ u(0, t) = 0 & u(1, t) = 0 \end{cases}$$

הגבול  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$  קיים וסופי.

$$\begin{aligned}
 & u_{tt} = u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\
 & (3) \quad \text{נתונה משוואת הגלים הבאה:} \quad u(x, 0) = 1 \\
 & \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}
 \end{aligned}$$

חשבו את  $u(x, 1)$ .

(4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \end{cases}$$

(5) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < \infty \\ u(0, t) = e^{-t} - 1 \\ u(x, 0) = 1 & u_t(x, 0) = 2 \sin(x) - 1 \end{cases}$$

6 נתונה הבעיה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x^2(1-x) \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t) dx$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + \cos(\pi x) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 1 \\ u(x, 0) &= x \end{aligned}$$

7 פתרו את הבעיה הבאה :

$$\text{רמז: } v(x, t) = u(x, t) - x \text{ התבוננו בפונקציה}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \sin(\pi x) & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = 0 & u(2, t) = 0 \end{cases}$$

8 פתרו את הבעיה הבאה :

9 פתרו את הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3 \sin(2x) + \frac{\pi - x}{\pi} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x}{\pi} + \sin(x) \\ u(0, t) = t & u(\pi, t) = 1 \end{cases}$$

$$\text{רמז: } u(x, t) = v(x, t) + t \frac{\pi - x}{\pi} + 1 \cdot \frac{x}{\pi} \text{ הגדירו}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) = t \end{cases}$$

10 פתרו את הבעיה הבאה :

$$\text{רמז: } v(x, t) = u(x, t) - t \text{ כדאי להגדיר פונקציית עזר}$$

**(11)** נתונה הבעיה הבאה :

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x, 0) = g(x) = 0 \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{חשבו } \int_0^2 \left| u(x, 1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= r & 1 < r < 2 \\ u(1, \theta) &= 1 + \sin \theta & \text{(12) פתרו את הבעיה הבאה :} \\ u(2, \theta) &= 1 + 2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in } x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1+x \end{cases} \quad \text{(13) פתרו את הבעיה הבאה :}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

$$\begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \leq r < 1 \\ u_n(1, \theta) = \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{(14) נתון כי } u_n(r, \theta) \text{ הוא פתרון של הבעיה :}$$

מצאו את  $u_n(r, \theta)$  וחשבו  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \theta)$ .