משוואות דיפרנציאליות חלקיות

פרק 9 - שאלות מסכמות במשוואות דיפרנציאליות חלקיות

תוכן העניינים

שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

1) פתרו את הבעיה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad 0<x<\infty \qquad t>1$$
$$u(x,0)=f(x)=0 \qquad u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}.$$

2) עבור איזו פונקציה לפתרון של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}+10u & 0<x<1,\ t>0\\ u(x,0)=h(x) & \\ u(0,t)=0 & u(1,t)=0\end{cases}$$

הגבול $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$ קיים וסופי.

3) נתונה משוואת הגלים הבאה:

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$
$$u(x,0)=1.$$
$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$.

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L, \qquad t>0\\ u(x,0)=x & \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 & \end{cases}$$

5) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty\\ u(0,t)=e^{-t}-1 & \\ u(x,0)=1 \qquad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 & \end{cases}$$

6) נתונה הבעיה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1,\ \ t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 & \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) & \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\,dx$.

7) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}+\cos(\pi x) & 0<x<1\ ,\ t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=1 & \\ u(x,0)=x & \end{array}.$$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t)=u(x,t)-x$.

8) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2\ \ ,\ \ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=0 & u(2,t)=0 \end{cases}.$$

9) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+3\sin(2x)+\dfrac{\pi-x}{\pi} & 0<x<\pi\ \ ,\ \ t>0 \\ u(x,0)=\dfrac{x}{\pi}+\sin(x) & \\ u(0,t)=t & u(\pi,t)=1 \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t)=v(x,t)+t\dfrac{\pi-x}{\pi}+1\cdot\dfrac{x}{\pi}$.

10) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}+1+\sin(2\pi x) & 0<x<1\ \ ,\ \ t>0 \\ u(x,0)=\sin(\pi x) & \\ u(0,t)=u(1,t)=t & \end{cases}.$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t)=u(x,t)-t$.

11) נתונה הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} & u_t(x,0) = g(x) = 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left| u(x,1) - \frac{1}{2} \right|^2 dx$.

12) פתרו את הבעיה הבאה:

$$\begin{aligned} &\Delta u = r && 1 < r < 2 \\ &u(1,\theta) = 1 + \sin\theta \\ &u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

13) פתרו את הבעיה הבאה: $\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & \text{in} \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1 + x \end{cases}$.

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות.

14) נתון כי $u_n(r,\theta)$ הוא פתרון של הבעיה: $\begin{cases} \Delta u_n = \left(\frac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$.

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim_{n \to \infty} u_n(r,\theta)$.