

# שיטות כמותיות

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה ..... 1
2. משפט ערך הביניים ..... 5

## רציפות של פונקציה

### שאלות

בשאלות 1-2 בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"<sup>1</sup> שלהן, ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.  
 ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות 4-7, מה צריך להיות הערך הקבוע של  $k$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל  $x$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (5) \quad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (6)$$

הערה: שאלה 7 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

<sup>1</sup> נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 8-10, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים  $a$  ו- $b$ , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

(11) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(12) ידוע ש- $f$  רציפה ו- $g$  לא רציפה.

האם  $f+g$  רציפה? הוכיחו זאת.

**(13)** נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$ .

הוכיחו או הפריכו:

- א. הפונקציה  $f$  חסומה לכל  $x$ .
- ב. הפונקציה  $f$  רציפה לכל  $x$ .
- ג. הפונקציה  $f$  מונוטונית לכל  $x$ .
- ד. הפונקציה  $f$  זוגית או אי-זוגית לכל  $x$ .

**(14)** תהי  $f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
- ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
- ג. תהי  $g(x) = x + \frac{1}{x}$ , ותהי  $f(x)$  מוגדרת וחיובית לכל  $x$ . האם ההרכבה  $g(f(x))$  בהכרח רציפה לכל  $x$ ?

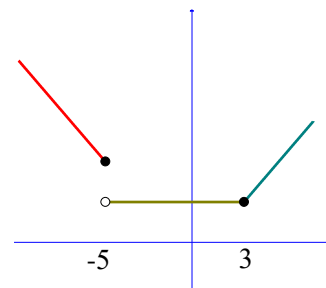
**(15)** תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $(0,1)$ .

תהי  $g$  הפונקציה המוגדרת בקטע  $(0,2)$ , על ידי  $g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

- א. האם יתכן שהנקודה  $x_0 = 1$  היא נקודת אי-רציפות סליקה של  $g$ ? נמקו.
- ב. האם  $g$  חסומה בקטע  $(0,2)$ ? נמקו.

### תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) א. רציפה בנקודה  $x=1$ , לא רציפה בנקודה  $x=2$ . ב. סליקה.
- (4)  $k=1$
- (5)  $k=4$
- (6)  $k=\frac{2}{3}$
- (7)  $k=-1$
- (8)  $a=2, b=1$  או  $a=1, b=2$
- (9)  $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (10)  $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.
- (14) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל  $x \neq -5$ . ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (15) א. לא. ב. כן.

## משפט ערך הביניים

### שאלות

בשאלות 1-3 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 4-5 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(4) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(5) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(6) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה  $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$  יש פתרון.

$$(7) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשבו את  $f(0)$ ,  $f(2)$ .

ב. האם ניתן להסיק, לפי משפט ערך הביניים, שלמשוואה  $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע  $(0,2)$ ?

(8) תהיינה  $f, g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , המקיימות:

$$f(a) < g(a), f(b) > g(b)$$

הוכיחו שקיימת נקודה  $a < c < b$ , שבה  $f(c) = g(c)$ .

- 9 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור  $[a, b]$ , שהוא חלקי לתחום הגדרתה. נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ . הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש- $f(c) = c$ . נקודה  $c$  כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.
- 10 נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = c^{1.5}$ .
- 11 נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) = f(1)$ .  
 א. הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [0, 0.5]$  כך ש- $f(c) = f(c + 0.5)$ .  
 ב. הוכיחו כי קיימות נקודות  $c, d \in [0, 1]$  כך ש- $f(c) = f(d)$ .
- 12 נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) < f(2) < f(1)$ . הוכיחו כי קיימים  $c_1, c_2 \in [0, 2]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$ .
- 13 נתונה פונקציה רציפה  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ , המקיימת  $f(0) = f(8)$ . הוכיחו כי קיימות נקודות  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$  כך ש- $f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$ .
- 14 יהיו  $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$  קבועים המקיימים  $a_1 + \dots + a_n = 1$ . הוכיחו כי למשוואה  $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$  יש לפחות פתרון אחד.
- 15 יהי  $P$  פולינום ממעלה זוגית, מהצורה  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , ונניח כי  $a_0 < 0$ . הוכיחו כי ל- $P$  ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.
- 16 יהיו  $f, g$  פונקציות רציפות המקיימות:  
 $0 < k \in \mathbb{R}$  כאשר  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$ .  
 הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה  $f(x) = g(x)$ .

**(17)** ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ , ותהיינה  $x_1, \dots, x_n$  (כאשר  $n > 1$ )

נקודות כלשהן ב- $(a, b)$ .

הוכיחו שקיימת נקודה  $c$  בקטע  $(a, b)$ ,

$$\text{כך ש- } f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

ב. תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $(a, b)$ .

האם לכל  $c \in (a, b)$ , ניתן למצוא נקודות  $x_1, \dots, x_n$ , שונות זו מזו,

$$\text{כאשר } n > 1, \text{ כך ש- } f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))?$$

הוכיחו זאת.

### תשובות סופיות

$$(6) \quad [0, 1]$$

$$(7) \quad \text{א. } f(2) = 5, f(0) = -1 \quad \text{ב. לא.}$$

שאלות 1-5 ושאלות 8-17 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [GooL.co.il](http://GooL.co.il)