מתמטיקה לכלכלנים

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה 1

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-2** בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן, ושרטטו את גרף הפונקציה:

1) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\le 2\\ 5-x & x>2\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x & x\ge 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$

3) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1/x & x\le 1\\ |x-2| & 1<x<2\\ 1 & x=2\\ x-2 & x>2\end{cases}$.

א. בדקו את רציפות הפונקציה בנקודות התפר שלה.

ב. עבור כל נקודת אי רציפות, קבעו מאיזה סוג היא.

בשאלות **4-7**, מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x:

4) $f(x)=\begin{cases}kx^2+x-2 & x\le 2\\ 5kx-6 & x>2\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1\\ k & x=1\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2\\ k & x=2\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}2x-k & x\le 0\\ x^{2x} & x>0\end{cases}$

הערה: שאלה **7** ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **8-10**, מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

8)
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

9)
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

10)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 9-10 ניתן לפתור רק לאחר שנלמד הנושא 'כלל לופיטל'.

11) הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

12) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה.

האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x \rfloor$.

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x.

ב. הפונקציה f רציפה לכל x.

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x.

14) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\geq 4\\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x.

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

15) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1\\ x^2 & 1\leq x<2\end{cases}$.

א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) א. רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. ב. סליקה.

4) $k=1$

5) $k=4$

6) $k=\frac{2}{3}$

7) $k=-1$

8) $a=1,b=2$ או $a=2,b=1$.

9) $a=-2e^{-1},b=e^{-1}$

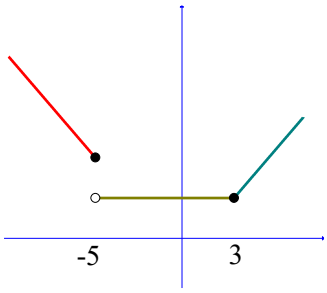
10) $a=\frac{e}{3},b=-\frac{e}{3}$

11) הוכחה.

12) הוכחה.

13) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

14) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq -5$. ב--5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

15) א. לא. ב. כן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©