

כלים מתמטים לפיזיקה

פרק 3 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה 1
2. משפט ערך הביניים 8

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות בנקודת התפר¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

(7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6:

רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2+x-2 & x \leq 2 \\ 5kx-6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^x - 2}{2^x + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17 ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$(18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

- א. שרטטו את גרף הפונקציה.
 ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
 ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .
 האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

19 תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי

- א. האם יתכן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.
 ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
 נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
 הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

21 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$, לכל $x, y \in \mathbb{R}$.
 נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
 הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$(22) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

- א. הפונקציה f חסומה לכל x .
 ב. הפונקציה f רציפה לכל x .
 ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .
 ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .

ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .

(25) הפונקציות $f(x) + 2g(x) - 3g(x) - 2g(x) - f(x)$ רציפות לכל x .

הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .

(26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .

כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

(28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$1. \min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) - |x-y|]$$

$$2. \max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y) + |x-y|]$$

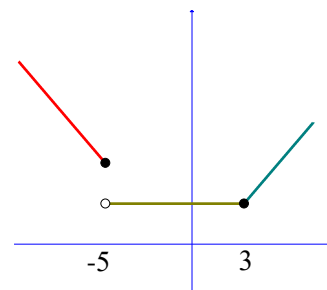
ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- \mathbb{R} אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- \mathbb{R} :

$$1. z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

$$2. z_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8) $k=1$
- (9) $k=4$
- (10) $k=\frac{2}{3}$
- (11) $k=-1$
- (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad (24)$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \quad x^2 = -\ln x$$

$$(3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

$$(4) \quad x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

בשאלות 5-6 הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

$$(5) \quad e^x - 5x = 0$$

$$(6) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x , המקיימת: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-4, 4]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו שלמשוואה $2x + f(x) = 1$ יש לפחות פתרון אחד.

(8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,

בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(9) \quad \text{נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשבו את $f(0)$, $f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$

יש פתרון בקטע $(0, 2)$?

10 תהיינה f, g פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ המקיימות $f(a) < g(a), f(b) > g(b)$. הוכיחו שקיימת נקודה $a < c < b$ שבה $f(c) = g(c)$.

11 נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.

נניח ש- $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך ש- $f(c) = c$.
נקודה c כנ"ל נקראת "נקודת שִׁבְת" של הפונקציה.

12 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = c^{1.5}$.

13 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(1)$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in [0, 0.5]$ כך ש- $f(c) = f(c+0.5)$.

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c, d \in [0, 1]$ כך ש- $f(c) = f(d)$.

14 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) < f(2) < f(1)$.

הוכיחו כי קיימים $c_1, c_2 \in [0, 2]$ כך ש- $f(c_1) = f(c_2)$.

15 נתונה פונקציה רציפה $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = f(8)$.

הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1, c_2, c_3, c_4 \in [0, 8]$ כך ש-

$$f(c_1) = f(c_2), f(c_3) = f(c_4)$$

16 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x + \sin x$ היא על \mathbb{R} .

17 הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x \cdot \sin x$ היא על \mathbb{R} .

18 תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π .

הוכיחו שקיים $x_0 \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

19 יהיו $0 \leq a_1, \dots, a_n \leq 1$ קבועים המקיימים $a_1 + \dots + a_n = 1$.

הוכיחו כי למשוואה $|x - a_1| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$ יש לפחות פתרון אחד.

(20) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה. הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.
- ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ פונקציה חח"ע ועל. הוכיחו כי f לא רציפה ב- \mathbb{R} .

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ פונקציה רציפה.

הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x , שעבורם $f(x) = \sin x$.

(22) יהי P פולינום ממעלה זוגית, מהצורה $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$,

ונניח כי $a_0 < 0$.

הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

(23) יהיו f, g פונקציות רציפות המקיימות :

$0 < k \in \mathbb{R}$ כאשר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -k, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -k, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = k$

הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x) = g(x)$.

(24) ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) , ותהיינה x_1, \dots, x_n (כאשר $n > 1$)

נקודות כלשהן ב- (a, b) .

הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a, b) , כך ש-

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a, b) .

האם לכל $c \in (a, b)$, ניתן למצוא נקודות x_1, \dots, x_n , שונות זו מזו,

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

כאשר $n > 1$, כך ש-

הוכיחו זאת.

(25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a, b) .

נניח כי: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$

הראו כי תמונת הקטע (a, b) היא \mathbb{R} .

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0) = -1$, $f(1) = 4$.

תהי $S = \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$.

א. הוכיחו ש- S לא ריקה.

ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α .

ג. הוכיחו כי $\alpha \in (0,1]$.

ד. הוכיחו כי $f(\alpha) = 0$.

(27) תהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a) = f(b)$.

הוכיחו שקיימים $a < x_1 < x_2 < b$, כך ש- $f(x_1) = f(x_2)$.

(28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0 \leq r \leq 1$.

הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c) = rz(a) + (1-r)z(b)$.

(29) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי למשוואה $A \sin x + B \cos x = C \sin 2x$ יש פתרון.

ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) > 0$, $f(4) > 2f(2)$.

הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c) = 2f(c)$.

ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0) = 1$, $f(1) = 2$.

הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a) = \frac{1}{a}$.

(30) פונקציה f מוגדרת לכל x .

לפונקציה יש את התכונה הבאה:

כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.

הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

(8) $[0,1]$

(9) א. $f(0) = -1$, $f(2) = 5$. ב. לא.

שאלות 1-7 ושאלות 10-30 הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il