חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א'

פרק 5 - רציפות של פונקציה - משפט ערך הביניים

תוכן העניינים

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות **1-6**: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר"[1] שלהן,
ובשאלות **1** ו-**2**, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

1) $f\left(x\right)=\begin{cases} x+1 & x\le 2 \\ 5-x & x>2 \end{cases}$

2) $f\left(x\right)=\begin{cases} x & x\ge 1 \\ x^2 & x<1 \end{cases}$

3) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\le 1 \\ \left|x-2\right| & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ x-2 & x>2 \end{cases}$

4) $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin x & x<0 \\ x^2 & 0\le x<1 \\ 2-x & 1\le x<2 \\ x-3 & x\ge 2 \end{cases}$

5) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x>0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

6) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x>0 \\ 2 & x=0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x<0 \end{cases}$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **3-6**:
רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.
בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות **8-11**: מה צריך להיות הערך הקבוע של k, על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x?

8) $f\left(x\right)=\begin{cases} kx^2+x-2 & x\le 2 \\ 5kx-6 & x>2 \end{cases}$

9) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x-1} & x\ne 1 \\ k & x=1 \end{cases}$

10) $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} & x\ne 2 \\ k & x=2 \end{cases}$

11) $f\left(x\right)=\begin{cases} 2x-k & x\le 0 \\ x^{2x} & x>0 \end{cases}$

הערה: שאלה **11** ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

[1] נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות **15-12**: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b,
על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

12)
$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{2x} & 0<x<\pi \\ a\cos x & x\ge \pi \end{cases}$$

13)
$$f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}+x^2 & x<-1 \\ bx^2+x-1 & -1\le x\le 1 \\ 4\dfrac{\sqrt{x-1+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x>1 \end{cases}$$

14)
$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ (x-1)\ln(x+1)+b & 0\le x\le 1 \\ a\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+4} & x<0 \end{cases}$$

15)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x<1 \\ ax^2+b & 1\le x\le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x>2 \end{cases}$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

16) הוכיחו או הפריכו:

א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה?
הוכיחו זאת.

18) תהי $f(x)=\begin{cases}|x|-1 & |x+1|\ge 4 \\ 2 & |x+1|<4\end{cases}$.

א. שרטטו את גרף הפונקציה.
ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).
ג. תהי $g(x)=x+\frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x.
האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x?

19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.
תהי g הפונקציה המוגדרת בקטע $(0,2)$, על ידי $g(x)=\begin{cases}f(x) & 0<x<1 \\ x^2 & 1\le x<2\end{cases}$.
א. האם יתכן שהנקודה $x_0=1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g? נמקו.
ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

20) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=f(x)f(y)$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y)=[f(x)f(y)]^2$, לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.
הוכיחו ש- f רציפה לכל x.

22) נתונה הפונקציה $f(x)=x-\frac{1}{2}\lfloor 2x\rfloor$.
הוכיחו או הפריכו:
א. הפונקציה f חסומה לכל x.
ב. הפונקציה f רציפה לכל x.
ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x.
ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x.

23) ענו על הסעיפים הבאים:

א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x=0$.

ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \le \sin x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x.

ידוע כי עבור $x \ne \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x)=\frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.

מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x.

25) הפונקציות $3g(x)+2f(x)$ ו- $f(x)-2g(x)$ רציפות לכל x.
הוכיחו שהפונקציה $|f(x)-g(x)|$ רציפה לכל x.

26) תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)(1-f(x))\right]=0$.

א. הוכיחו או הפריכו: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ או $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

27) תהי f מוגדרת לכל x.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x, אז f רציפה לכל x.

ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x, אזי f רציפה לכל x.

ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=4$, אזי $f(x)=4$ לכל x.
כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x?

28) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y)-|x-y|]$

2. $Max\{x, y\} = \frac{1}{2}[(x+y)+|x-y|]$

ב. הוכיחו כי אם f, g רציפות ב- $\mathbb{R}$ אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב- $\mathbb{R}$:

1. $z_1(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

2. $z_2(x) = Max\{f(x), g(x)\}$

תשובות סופיות

1) רציפה.

2) רציפה.

3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.

5) לא רציפה.

6) לא רציפה.

7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.

8) $k=1$

9) $k=4$

10) $k=\frac{2}{3}$

11) $k=-1$

12) $a=0\ ,\ b=\frac{1}{2}$

13) $a=1\ ,\ b=2$ או $a=2\ ,\ b=1$.

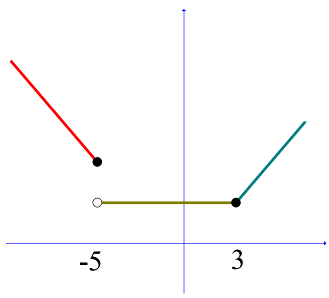
14) $a=-2e^{-1}\ ,\ b=e^{-1}$

15) $a=\frac{e}{3}\ ,\ b=-\frac{e}{3}$

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) א.



ב. הפונקציה רציפה לכל $x\neq-5$. ב- -5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.

19) א. לא. ב. כן.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

23) שאלת הוכחה.

24) $$f(x)=\begin{cases} -\pi & x=-1 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x\neq\pm1 \\ \pi & x=1 \end{cases}$$

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

משפט ערך הביניים

שאלות

בשאלות **1-4** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות פתרון אחד:

1) $x^3+4x-1=0$

2) $x^2=-\ln x$

3) $x-0.25\sin x=7$

4) $x^3+bx^2+cx+d=0$

בשאלות **5-6** הוכיחו שלמשוואה יש לפחות שני פתרונות:

5) $e^x-5x=0$

6) $4x^3+5x-\frac{1}{x}=0$

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה לכל x, המקיימת: $f(0)=1$, $f(1)=2$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)+\sin x=4x$ יש לפחות פתרון אחד.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[-4,4]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שלמשוואה $2x+f(x)=1$ יש לפחות פתרון אחד.

8) מצאו קטע, שאורכו אינו עולה על יחידה אחת,
בו למשוואה $x^2=10-\frac{1}{x}$ יש פתרון.

9) נגדיר $f(x)=x^2+\frac{1}{x-1}$.

א. חשבו את $f(2)$, $f(0)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2+\frac{1}{x-1}=0$
יש פתרון בקטע $(0,2)$?

10) תהיינה f,g פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ המקיימות $f(a)<g(a), f(b)>g(b)$

הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ שבה $f(c)=g(c)$.

11) נתונה פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ שהוא חלקי לתחום הגדרתה.

נניח ש- $f([a,b])\subseteq[a,b]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=c$.

נקודה c כנ"ל נקראת "**נקודת שֶׁבֶת**" של הפונקציה.

12) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to[0,1]$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=c^{1.5}$.

13) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(1)$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in[0,0.5]$ כך ש- $f(c)=f(c+0.5)$.

ב. הוכיחו כי קיימות נקודות $c,d\in[0,1]$ כך ש- $f(c)=f(d)$.

14) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)<f(2)<f(1)$.

הוכיחו כי קיימים $c_1,c_2\in[0,2]$ כך ש- $f(c_1)=f(c_2)$.

15) נתונה פונקציה רציפה $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=f(8)$.

הוכיחו כי קיימות נקודות $c_1,c_2,c_3,c_4\in[0,8]$ כך ש-

$f(c_1)=f(c_2),\ f(c_3)=f(c_4)$.

16) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x+\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

17) הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x\cdot\sin x$ היא על $\mathbb{R}$.

18) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית עם מחזור 2π.

הוכיחו שקיים $x_0\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+\pi)=f(x_0)$.

19) יהיו $0\le a_1,\dots,a_n\le 1$ קבועים המקיימים $a_1+\dots+a_n=1$.

הוכיחו כי למשוואה $\frac{n}{2}=|x-a_1|+\dots+|x-a_n|$ יש לפחות פתרון אחד.

20) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ורציפה.
הוכיחו כי f עולה ממש או יורדת ממש.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ פונקציה חח"ע ועל.
הוכיחו כי f לא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

21) תהי $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי קיימים אינסוף ערכים של x, שעבורם $f(x)=\sin x$.

22) יהי P פולינום ממעלה **זוגית**, מהצורה $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$,
ונניח כי $a_0<0$.
הוכיחו כי ל- P ישנם לפחות שני שורשים ממשיים, שונים זה מזה.

23) יהיו f,g פונקציות רציפות המקיימות:
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=k,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-k,\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=k$, כאשר $0<k\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי קיים לפחות פתרון אחד למשוואה $f(x)=g(x)$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b), ותהיינה $x_1,\ldots,x_n$ (כאשר $n>1$)
נקודות כלשהן ב- (a,b).
הוכיחו שקיימת נקודה c בקטע (a,b), כך ש-
$f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$.

ב. תהי f פונקציה רציפה בקטע (a,b).
האם לכל $c\in(a,b)$, ניתן למצוא נקודות $x_1,\ldots,x_n$, שונות זו מזו,
כאשר $n>1$, כך ש- $f(c)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_n)\right)$?
הוכיחו זאת.

25) תהי f פונקציה רציפה בקטע פתוח (a,b).
נניח כי: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$.
הראו כי תמונת הקטע (a,b) היא $\mathbb{R}$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, המקיימת $f(0)=-1,\ f(1)=4$.
תהי $S=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}$.
א. הוכיחו ש- S לא ריקה.
ב. הוכיחו שלקבוצה S יש חסם עליון, שנסמנו α.
ג. הוכיחו כי $\alpha\in(0,1]$.
ד. הוכיחו כי $f(\alpha)=0$.

27) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, כך ש- $f(a)=f(b)$.
הוכיחו שקיימים $a<x_1<x_2<b$, כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$.

28) תהי $z(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ויהי $0\le r\le 1$.
הוכיחו שיש c בקטע, עבורו מתקיים $z(c)=rz(a)+(1-r)z(b)$.

29) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו כי למשוואה $A\sin x+B\cos x=C\sin 2x$ יש פתרון.
ב. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(4)>2f(2),\ \ f(0)>0$.
הוכיחו שקיים c כך ש- $f(2c)=2f(c)$.
ג. תהי $f(x)$ רציפה לכל x המקיימת $f(0)=1,\ f(1)=2$.
הוכיחו שקיים a כך ש- $f(a)=\frac{1}{a}$.

30) פונקציה f מוגדרת לכל x.
לפונקציה יש את התכונה הבאה:
כל ערך ממשי מתקבל על ידי הפונקציה בדיוק פעמיים.
הוכיחו כי הפונקציה אינה יכולה להיות רציפה.

תשובות סופיות

8) $[0.1,1]$

9) א. $f(2)=5$, $f(0)=-1$ ב. לא.

שאלות **1-7** ושאלות **10-30** הן שאלות הוכחה.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר GooL.co.il