

סטטיסטיקה

פרק 22 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

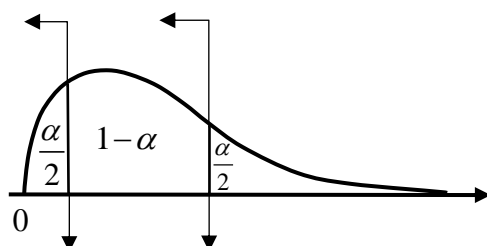
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

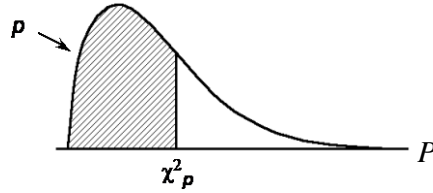
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010000	0.015774	0.023381	0.033371	0.046777	0.063448	0.084458	0.111454	0.148685	0.200902
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.100000	0.210781	0.374695	0.575554	0.787913	1.054784	1.391549	1.847541	2.447873	3.000793
3	0.071714	0.115777	0.216000	0.352938	0.584394	0.923778	1.212765	1.598722	2.071813	2.602521	3.219132	3.858418	4.607893
4	0.207163	0.297867	0.484432	0.711494	1.064494	1.625561	2.365879	3.137053	4.044917	5.018395	6.092146	7.344103	8.737724
5	0.411643	0.554267	0.831439	1.154929	1.610708	2.335938	3.357163	4.347827	5.401404	6.626197	8.019176	9.542425	11.264542
6	0.675647	0.872243	1.236757	1.635320	2.204130	3.149286	4.351564	5.688846	7.172130	8.834471	10.644645	12.591600	14.454089
7	0.989266	1.239843	1.690766	2.179030	2.833058	3.820792	5.160541	6.607913	8.341405	10.215253	12.257863	14.467554	16.876868
8	1.344296	1.650031	2.179730	2.732637	3.490052	4.575551	6.026887	7.717357	9.877859	12.032768	14.442667	16.919080	19.532830
9	1.734724	2.099872	2.700108	3.337147	4.177187	5.309054	6.898155	8.932948	11.484362	14.017048	16.919080	19.532830	22.758363
10	2.160133	2.560000	3.250133	3.940293	4.875274	6.177860	7.928847	10.297032	12.591600	15.491959	18.307032	21.154265	24.433231
11	2.602521	3.050000	3.820792	4.575551	5.580052	7.023353	8.400692	10.085312	12.591600	15.491959	18.307032	21.154265	22.995790
12	3.073932	3.570000	4.400133	5.230293	6.300052	7.879155	9.236353	11.216715	13.816165	16.215101	19.032830	22.367989	24.724996
13	3.571847	4.110000	5.010133	5.890293	7.040052	8.791551	10.243053	12.401532	15.000032	17.534548	20.215101	23.200793	25.812134
14	4.073932	4.660000	5.630133	6.570293	7.790052	9.741551	11.336353	13.270032	16.270032	18.758363	21.307032	24.200793	27.187134
15	4.600133	5.230000	6.260133	7.260293	8.550052	10.791551	12.443053	14.437032	17.534548	20.000032	22.307032	25.187134	28.700793
16	5.140133	5.810000	6.910133	7.960293	9.310052	11.841551	13.693053	15.693053	18.758363	21.270032	23.534548	26.187134	30.190793
17	5.700133	6.410000	7.560133	8.670293	10.100052	12.891551	14.943053	17.043053	20.000032	22.534548	24.766165	27.187134	31.576868
18	6.260133	7.010000	8.230133	9.390293	10.900052	14.141551	16.193053	18.293053	21.270032	23.766165	25.991600	28.187134	32.900793
19	6.840133	7.630000	8.910133	10.100052	11.700052	15.391551	17.443053	19.543053	22.534548	25.000032	27.200793	29.187134	34.176868
20	7.430133	8.260000	9.590133	10.900052	12.490052	16.641551	18.693053	20.793053	23.766165	26.187134	28.307032	30.187134	35.442667
21	8.030133	8.900000	10.300133	11.690052	13.280052	17.891551	19.943053	22.043053	25.000032	27.366165	29.307032	31.187134	36.700793
22	8.640133	9.540000	11.000133	12.380052	14.070052	19.141551	21.093053	23.293053	26.187134	28.534548	30.307032	32.187134	37.958363
23	9.260133	10.200000	11.700133	13.100052	14.870052	20.341551	22.243053	24.543053	27.366165	29.700793	31.500793	33.187134	39.216165
24	9.890133	10.900000	12.400133	13.800052	15.670052	21.591551	23.393053	25.793053	28.534548	30.866165	32.691600	34.187134	40.474996
25	10.530133	11.550000	13.100133	14.600052	16.490052	22.891551	24.543053	27.043053	29.700793	32.000032	33.866165	35.187134	41.733231
26	11.180133	12.200000	13.800133	15.400052	17.300052	24.141551	25.693053	28.293053	30.866165	33.166165	35.000032	36.187134	42.991600
27	11.840133	12.900000	14.600133	16.200052	18.100052	25.391551	26.843053	29.543053	32.000032	34.366165	36.166165	37.187134	44.250000
28	12.500133	13.600000	15.300133	16.900052	18.900052	26.641551	27.993053	30.793053	32.900793	35.600793	37.307032	38.187134	45.508363
29	13.170133	14.300000	16.000133	17.700052	19.700052	27.891551	29.143053	32.043053	33.766165	36.866165	38.466165	39.187134	46.766165
30	13.840133	15.000000	16.800133	18.500052	20.500052	29.141551	30.293053	33.293053	34.600793	38.000032	39.700793	40.187134	48.024996