

סטטיסטיקה

פרק 16 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{רווח הסמך לשונות:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

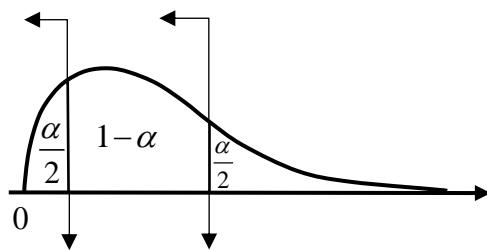
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

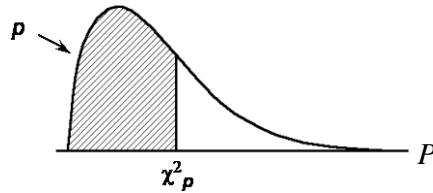
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010000	0.015773	0.023354	0.033371	0.044574	0.056416	0.069565	0.084916	0.103915	0.125664
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103915	0.210782	0.333714	0.475341	0.636914	0.797885	0.955997	1.108458	1.271812	1.444568
3	0.071714	0.115717	0.216000	0.352939	0.584394	0.812297	1.064495	1.344296	1.635446	1.934822	2.246131	2.576577	2.946262
4	0.207581	0.297191	0.484432	0.711494	1.064495	1.500273	1.928053	2.365593	2.796940	3.219132	3.642128	4.075624	4.519520
5	0.411643	0.554267	0.831439	1.157171	1.610739	2.204169	2.875784	3.581413	4.351464	5.135612	5.924468	6.727729	7.551422
6	0.676068	0.872273	1.240131	1.645575	2.204169	2.875784	3.581413	4.351464	5.135612	5.924468	6.727729	7.551422	8.400701
7	0.989315	1.240131	1.645575	2.204169	2.875784	3.581413	4.351464	5.135612	5.924468	6.727729	7.551422	8.400701	9.347827
8	1.344296	1.635446	2.160368	2.733261	3.490295	4.255401	5.070832	5.914160	6.765598	7.632999	8.516260	9.415429	10.330444
9	1.734724	2.093024	2.700108	3.337143	4.167557	4.973269	5.834733	6.714418	7.591422	8.484632	9.393987	10.319119	11.246685
10	2.160368	2.567000	3.250133	3.940293	4.875273	5.770753	6.634890	7.527614	8.437063	9.347827	10.265979	11.158178	12.090188
11	2.602521	3.052939	3.820801	4.571833	5.581413	6.469879	7.369893	8.281413	9.193987	10.107729	11.022729	11.937520	12.857520
12	3.073932	3.571714	4.400260	5.230261	6.301413	7.193987	8.093987	8.993987	9.893987	10.793987	11.693987	12.593987	13.493987
13	3.571714	4.110260	5.010260	5.890260	7.040260	7.860260	8.760260	9.660260	10.560260	11.460260	12.360260	13.260260	14.160260
14	4.075624	4.660260	5.630260	6.570260	7.790260	8.610260	9.510260	10.410260	11.310260	12.210260	13.110260	14.010260	14.910260
15	4.600260	5.230260	6.260260	7.260260	8.550260	9.370260	10.270260	11.170260	12.070260	12.970260	13.870260	14.770260	15.670260
16	5.140260	5.810260	6.910260	7.960260	9.310260	10.130260	11.030260	11.930260	12.830260	13.730260	14.630260	15.530260	16.430260
17	5.700260	6.410260	7.560260	8.670260	10.10260	10.920260	11.820260	12.720260	13.620260	14.520260	15.420260	16.320260	17.220260
18	6.260260	7.010260	8.230260	9.390260	10.90260	11.720260	12.620260	13.520260	14.420260	15.320260	16.220260	17.120260	18.020260
19	6.840260	7.630260	8.910260	10.10260	11.70260	12.520260	13.420260	14.320260	15.220260	16.120260	17.020260	17.920260	18.820260
20	7.430260	8.260260	9.590260	10.90260	12.40260	13.220260	14.120260	15.020260	15.920260	16.820260	17.720260	18.620260	19.520260
21	8.030260	8.900260	10.30260	11.60260	13.20260	14.020260	14.920260	15.820260	16.720260	17.620260	18.520260	19.420260	20.320260
22	8.640260	9.540260	11.00260	12.30260	14.00260	14.820260	15.720260	16.620260	17.520260	18.420260	19.320260	20.220260	21.120260
23	9.260260	10.20260	11.70260	13.10260	14.80260	15.620260	16.520260	17.420260	18.320260	19.220260	20.120260	21.020260	21.920260
24	9.890260	10.90260	12.40260	13.80260	15.60260	16.420260	17.320260	18.220260	19.120260	20.020260	20.920260	21.820260	22.720260
25	10.50260	11.50260	13.10260	14.60260	16.50260	17.30260	18.20260	19.10260	20.00260	20.90260	21.80260	22.70260	23.60260
26	11.20260	12.20260	13.80260	15.40260	17.30260	18.20260	19.10260	20.00260	20.90260	21.80260	22.70260	23.60260	24.50260
27	11.80260	12.90260	14.60260	16.20260	18.10260	19.00260	19.90260	20.80260	21.70260	22.60260	23.50260	24.40260	25.30260
28	12.50260	13.60260	15.30260	16.90260	18.90260	19.80260	20.70260	21.60260	22.50260	23.40260	24.30260	25.20260	26.10260
29	13.10260	14.30260	16.00260	17.70260	19.80260	20.70260	21.60260	22.50260	23.40260	24.30260	25.20260	26.10260	27.00260
30	13.80260	15.00260	16.80260	18.50260	20.60260	21.50260	22.40260	23.30260	24.20260	25.10260	26.00260	26.90260	27.80260