

סטטיסטיקה ב

פרק 10 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

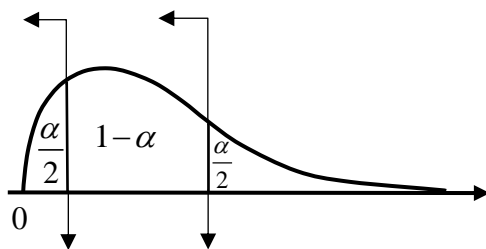
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

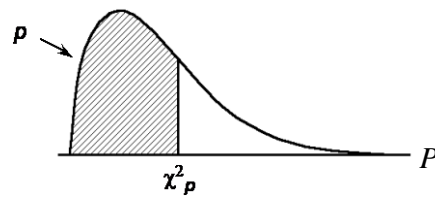
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.046779	0.063788	0.085378	0.111532	0.148505	0.200902
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.210782	0.352729	0.501219	0.675746	0.900000	1.103217	1.385768	1.675948	2.000000
3	0.071714	0.115777	0.216000	0.352729	0.501219	0.675746	0.900000	1.103217	1.385768	1.675948	2.000000	2.365775	2.833059
4	0.207161	0.297181	0.484000	0.711162	1.064515	1.520717	2.079614	2.777713	3.599471	4.540762	5.617866	6.756543	8.162706
5	0.412003	0.554267	0.831000	1.155172	1.610730	2.202770	2.964556	3.840907	4.958532	6.251362	7.879130	9.634564	11.628793
6	0.676005	0.872000	1.240000	1.645573	2.202770	2.964556	3.840907	4.958532	6.251362	7.879130	9.634564	11.628793	14.067160
7	0.989000	1.240000	1.690000	2.179000	2.833059	3.745377	4.779037	6.024186	7.578390	9.347826	11.344942	13.601371	16.012784
8	1.340000	1.650000	2.180000	2.730000	3.490000	4.570000	5.890000	7.340000	9.030000	10.990000	13.120000	15.500000	18.475000
9	1.730000	2.090000	2.700000	3.330000	4.170000	5.300000	6.750000	8.340000	10.110000	12.020000	14.188000	16.690000	19.990000
10	2.160000	2.560000	3.250000	3.940000	4.870000	6.170000	7.770000	9.540000	11.476000	13.440000	15.579000	17.920000	21.160000
11	2.600000	3.050000	3.820000	4.570000	5.580000	7.030000	8.790000	10.640000	12.740000	14.800000	17.030000	19.190000	22.360000
12	3.070000	3.570000	4.400000	5.230000	6.300000	7.880000	9.780000	11.810000	14.160000	16.210000	18.549000	20.530000	23.680000
13	3.570000	4.110000	5.010000	5.890000	7.040000	8.930000	11.030000	13.120000	15.670000	17.700000	20.000000	22.040000	25.000000
14	4.070000	4.660000	5.630000	6.570000	7.790000	10.200000	12.400000	14.680000	17.260000	19.360000	21.660000	23.680000	26.430000
15	4.600000	5.230000	6.260000	7.260000	8.550000	11.000000	13.300000	15.580000	18.490000	20.900000	23.680000	25.790000	28.000000
16	5.140000	5.810000	6.910000	7.960000	9.310000	11.900000	14.300000	16.590000	19.780000	22.300000	25.000000	27.490000	29.630000
17	5.700000	6.410000	7.560000	8.670000	10.100000	12.800000	15.300000	17.630000	21.160000	23.540000	26.590000	28.790000	31.270000
18	6.260000	7.010000	8.230000	9.390000	10.900000	13.700000	16.300000	18.700000	22.620000	24.770000	27.990000	30.190000	32.910000
19	6.840000	7.630000	8.910000	10.100000	11.700000	14.600000	17.300000	19.800000	23.800000	26.170000	29.400000	31.570000	34.600000
20	7.430000	8.260000	9.590000	10.900000	12.400000	15.500000	18.300000	20.900000	25.000000	27.590000	30.970000	33.000000	36.190000
21	8.030000	8.900000	10.300000	11.600000	13.200000	16.300000	19.300000	22.100000	26.200000	28.890000	32.670000	34.600000	37.910000
22	8.640000	9.540000	11.000000	12.300000	14.000000	17.200000	20.700000	23.300000	27.500000	30.190000	34.650000	36.190000	39.700000
23	9.260000	10.200000	11.700000	13.100000	14.800000	18.100000	22.300000	24.600000	28.900000	31.770000	36.410000	37.910000	41.570000
24	9.890000	10.900000	12.400000	13.800000	15.700000	19.000000	23.300000	26.000000	30.200000	33.410000	38.880000	40.650000	43.530000
25	10.500000	11.500000	13.100000	14.600000	16.500000	19.900000	24.300000	27.500000	31.700000	35.170000	40.650000	42.790000	45.660000
26	11.200000	12.200000	13.800000	15.400000	17.300000	20.800000	25.300000	29.000000	33.200000	36.780000	42.790000	44.980000	47.960000
27	11.800000	12.900000	14.600000	16.200000	18.100000	21.700000	26.300000	30.400000	34.650000	38.580000	44.980000	47.200000	50.330000
28	12.500000	13.600000	15.300000	16.900000	18.900000	22.700000	27.300000	31.600000	35.700000	40.290000	47.200000	49.650000	52.780000
29	13.100000	14.300000	16.000000	17.700000	19.800000	23.600000	28.300000	32.700000	36.900000	41.900000	49.650000	51.150000	55.330000
30	13.800000	15.000000	16.800000	18.500000	20.600000	24.500000	29.300000	33.800000	38.160000	43.660000	51.150000	52.780000	58.000000