

מבוא לסטטיסטיקה

פרק 14 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{רווח הסמך לשונות:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

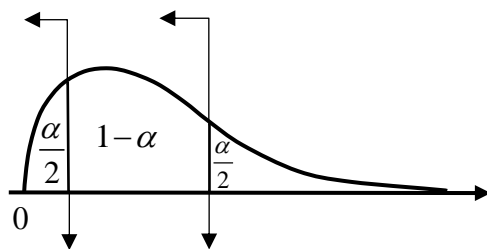
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

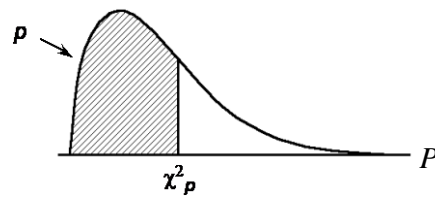
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020002	0.037467	0.102430	1.320321	2.705543	3.841463	5.023890	6.634895	7.879443
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103853	0.210796	0.575554	1.390203	2.770553	4.605171	5.991465	7.377787	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115787	0.216000	0.352729	0.584394	1.212765	2.370153	4.110843	6.251391	7.814727	9.347827	11.344831	12.838158
4	0.207263	0.297872	0.484432	0.711162	1.064554	1.920907	3.357163	5.390293	7.779436	9.487714	11.142313	13.276704	14.860204
5	0.411538	0.554267	0.831439	1.155172	1.610738	2.675521	4.351464	6.625564	9.246451	11.070499	12.832502	15.088253	16.750428
6	0.675650	0.872243	1.238562	1.635309	2.202770	3.450296	5.348153	7.879178	10.644645	12.591619	14.449126	16.755381	18.547564
7	0.989266	1.240131	1.690766	2.179003	2.833058	4.254799	6.346835	9.040951	12.016778	14.164574	16.012784	18.475174	20.277561
8	1.344296	1.649778	2.180094	2.732637	3.490297	5.074854	7.344187	10.215379	13.361536	15.507413	17.534548	20.090228	22.026316
9	1.734724	2.090238	2.700108	3.337133	4.177187	5.903788	8.340734	11.416654	14.690292	16.919089	19.022831	21.665991	23.589312
10	2.169905	2.565834	3.250132	3.940347	4.875269	6.749854	9.340834	12.591585	16.012786	18.307034	20.537566	23.200734	25.188150
11	2.601055	3.052865	3.820168	4.575829	5.581415	7.578533	10.340834	13.700540	17.337399	19.678052	21.919060	24.724952	26.756853
12	3.076472	3.571846	4.400214	5.233055	6.302187	8.444672	11.337793	14.800905	18.574548	21.029216	23.336714	26.217065	28.304224
13	3.571846	4.110233	5.010260	5.890294	7.041498	9.302187	12.337793	16.009053	19.811903	22.478595	24.735593	27.707053	29.819520
14	4.076472	4.668120	5.630306	6.570533	7.790297	10.212765	13.337793	17.151887	21.064172	23.684671	26.119397	29.141221	31.319246
15	4.600233	5.235718	6.260352	7.260771	8.550297	11.140296	14.337793	18.245953	22.307034	25.000136	27.587113	30.578438	32.801304
16	5.142313	5.813116	6.910400	7.961009	9.310297	11.990296	15.337793	19.411903	23.541887	26.296231	28.845036	32.000233	34.266454
17	5.702708	6.410233	7.560446	8.671247	10.110297	12.880296	16.337793	20.590292	24.796231	27.587113	30.191461	33.408742	35.718222
18	6.269266	7.017350	8.230492	9.391485	10.990296	13.770296	17.337793	21.664574	26.010292	28.869126	31.526314	34.802813	37.153768
19	6.842002	7.634467	8.910538	10.111723	11.770296	14.670296	18.337793	22.770540	27.204172	30.143531	32.909573	36.190764	38.581224
20	7.430766	8.261584	9.590584	10.911961	12.440296	15.570296	19.337793	23.807034	28.418871	31.410292	34.200734	37.566473	40.000000
21	8.034467	8.908701	10.300630	11.692199	13.210296	16.470296	20.337793	24.911903	29.633570	32.671136	35.578438	38.932146	41.401224
22	8.643116	9.545818	11.030676	12.472437	14.010296	17.370296	21.337793	26.016778	30.811903	33.914613	36.780734	40.289126	42.796231
23	9.256714	10.192935	11.780722	13.272675	14.830296	18.270296	22.337793	27.111903	32.016778	35.171136	38.153531	41.634613	44.187500
24	9.875263	10.850052	12.450768	14.092913	15.670296	19.170296	23.337793	28.216778	33.211903	36.414613	39.414613	43.000000	45.562500
25	10.508766	11.517169	13.150814	14.917151	16.530296	20.070296	24.337793	29.316778	34.416778	37.657034	40.657034	44.312500	46.925000
26	11.147266	12.194286	13.880860	15.707389	17.410296	20.970296	25.337793	30.416778	35.618871	38.884613	41.914613	45.612500	48.275000
27	11.790766	12.881403	14.630906	16.563627	18.310296	21.870296	26.337793	31.516778	36.718871	40.157034	43.214613	47.000000	49.625000
28	12.439266	13.578520	15.400952	17.485865	19.230296	22.770296	27.337793	32.616778	37.816778	41.334613	44.514613	48.312500	51.000000
29	13.092766	14.285637	16.190998	18.474103	20.170296	23.670296	28.337793	33.716778	39.016778	42.614613	45.714613	49.612500	52.375000
30	13.751266	15.002754	16.991044	19.528341	21.130296	24.570296	29.337793	34.816778	40.316778	43.814613	47.014613	50.912500	53.750000