

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א פלסטיקה וכימיה

פרק 49 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן..... 1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

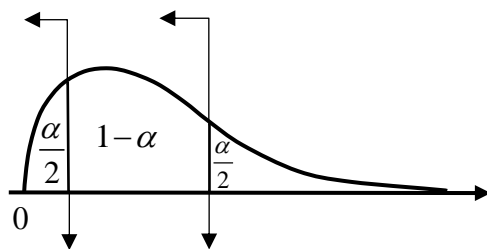
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

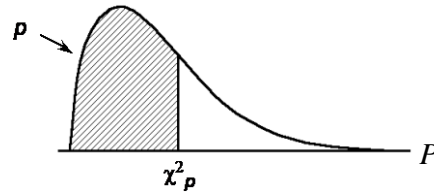
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023658	0.035793	0.050918	0.071724	0.098446	0.137808	0.192962	0.274877
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.210782	0.352929	0.509177	0.717242	0.984462	1.378080	1.929619	2.748771	3.841463
3	0.071714	0.115777	0.216454	0.352929	0.509177	0.717242	0.984462	1.378080	1.929619	2.748771	3.841463	5.015827	6.634896
4	0.207581	0.297872	0.484432	0.717242	1.064494	1.508528	2.071886	2.770552	3.599478	4.540762	5.619267	6.928819	8.464715
5	0.411543	0.554267	0.831439	1.154922	1.610708	2.204134	2.964565	3.838324	4.958532	6.256124	7.879178	9.348405	11.142021
6	0.676068	0.872243	1.238562	1.635309	2.204134	2.964565	3.838324	4.958532	6.256124	7.879178	9.348405	11.142021	13.454418
7	0.989266	1.239843	1.690865	2.179005	2.833058	3.745401	4.755396	5.988555	7.460242	9.160831	11.030839	13.121679	15.985234
8	1.344296	1.650063	2.179005	2.732637	3.490157	4.540762	5.619267	6.928819	8.464715	10.215389	12.032768	14.067564	17.153871
9	1.734724	2.093029	2.700108	3.337143	4.168223	5.091439	6.256124	7.633030	9.236353	11.017786	12.938849	15.086252	18.475309
10	2.160133	2.561802	3.246997	3.940347	4.878314	5.988555	7.367783	8.934783	10.828138	12.938849	15.086252	17.534548	20.483173
11	2.602521	3.052769	3.820891	4.575829	5.581416	6.634896	8.178105	9.889264	11.978002	14.154772	16.577514	18.557494	22.164610
12	3.076472	3.571796	4.401200	5.229655	6.302137	7.278918	8.657771	10.575834	12.838158	15.178242	17.275087	19.579234	23.919315
13	3.571796	4.114186	5.010634	5.891851	7.041515	8.034107	9.348405	11.338169	13.677842	16.013268	18.207413	20.539519	25.818121
14	4.077715	4.661011	5.630261	6.576562	7.791605	8.745322	10.128029	12.178053	14.567697	17.153871	19.367812	21.667514	27.839400
15	4.602876	5.230267	6.262202	7.267515	8.551413	9.502296	10.964553	13.000794	15.577484	18.245987	20.483173	22.900714	30.193395
16	5.144261	5.811038	6.914369	7.964632	9.311635	10.296730	11.791605	13.886755	16.598559	19.367812	21.667514	24.290721	32.801301
17	5.702135	6.413315	7.566764	8.677311	10.112321	11.127084	12.621353	14.820804	17.708319	20.539514	22.900714	25.790236	35.567553
18	6.266261	7.017097	8.230363	9.395012	10.934563	11.954413	13.400294	15.850032	18.868529	21.767514	24.290721	27.203514	38.582234
19	6.846724	7.632297	8.916011	10.117711	11.773011	12.777322	14.228029	16.926755	20.090236	23.027014	25.790236	28.762914	41.771871
20	7.432846	8.269802	9.594369	10.934563	12.621353	13.607084	15.107084	17.167514	21.314714	24.433173	27.203514	30.193395	45.022961
21	8.034724	8.909843	10.306261	11.773011	13.490157	14.534107	16.034107	18.454772	22.617786	25.790236	28.762914	31.771871	48.423173
22	8.642296	9.541011	11.041515	12.621353	14.401515	15.502296	17.002296	19.800794	24.000794	27.203514	30.193395	33.409514	51.979610
23	9.264715	10.173029	11.791605	13.490157	15.270157	16.510634	17.910634	21.215389	25.415389	28.762914	31.771871	35.171871	55.671871
24	9.892296	10.816011	12.556124	14.388169	16.148223	17.567514	18.867514	22.617786	26.900794	30.193395	33.409514	37.015389	59.642961
25	10.525214	11.460267	13.330261	15.296562	17.046562	18.664565	19.864565	24.128029	28.433173	31.771871	35.171871	38.910634	63.690236
26	11.173011	12.115773	14.116011	16.204134	17.964565	19.591605	20.820804	25.371871	30.193395	33.409514	37.015389	40.910634	67.923173
27	11.826124	12.782296	14.910634	17.167514	18.895011	20.534107	21.770157	26.642961	31.771871	35.171871	38.910634	42.910634	72.334715
28	12.494715	13.460267	15.710634	18.167514	19.840157	21.410634	22.690236	27.942961	33.409514	37.015389	40.910634	45.022961	76.923173
29	13.177715	14.149843	16.516011	19.167514	20.800794	22.220804	23.634107	29.290236	35.171871	39.160634	42.910634	47.240721	81.671871
30	13.875309	14.850267	17.326261	20.090236	21.770157	23.002296	24.567514	30.710634	37.015389	40.910634	45.022961	49.582234	86.660236