

מבוא לסטטיסטיקה א

פרק 21 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

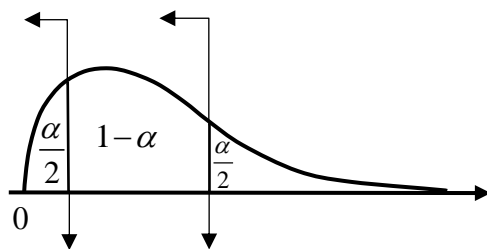
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020001	0.033421	0.054129	0.101280	0.138009	0.175395	0.214754	0.248602	0.287744
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214754	0.352729	0.505131	0.717229	0.900000	1.054558	1.212768	1.378778	1.549438
3	0.071714	0.115777	0.216449	0.352729	0.505131	0.717229	0.900000	1.054558	1.212768	1.378778	1.549438	1.724748	1.900108
4	0.207161	0.297871	0.484418	0.717229	1.064465	1.385816	1.753458	2.145762	2.478575	2.748779	3.000767	3.325714	3.641593
5	0.411438	0.554267	0.831439	1.145426	1.609381	2.008543	2.574554	3.000767	3.325714	3.641593	3.956540	4.278439	4.617189
6	0.675674	0.872226	1.236778	1.635309	2.204130	2.798398	3.579296	4.278439	4.617189	4.964538	5.309120	5.651388	6.001854
7	0.989266	1.239843	1.690866	2.179003	2.833058	3.599273	4.540760	5.398767	5.791465	6.162874	6.533120	6.902322	7.280599
8	1.344296	1.650031	2.179750	2.732637	3.490295	4.347824	5.308788	6.251351	6.626160	6.992555	7.360440	7.729822	8.100704
9	1.734724	2.099872	2.700108	3.337133	4.167557	5.021478	6.024186	7.001424	7.377757	7.746043	8.116280	8.488472	8.862624
10	2.169871	2.558293	3.246373	3.940347	4.875274	5.715184	6.756871	7.779435	8.157153	8.527093	8.899264	9.273664	9.650392
11	2.602521	3.045752	3.816255	4.575819	5.581415	6.368803	7.424534	8.460710	8.840292	9.212064	9.586024	9.962176	10.340512
12	3.073738	3.571795	4.401404	5.226051	6.304565	7.172434	8.260553	9.324884	9.706290	10.079864	10.455604	10.833512	11.213584
13	3.571496	4.114187	5.011853	5.891459	7.041498	7.953262	9.076311	10.162220	10.545440	10.920864	11.298464	11.676224	12.056144
14	4.073276	4.666711	5.639521	6.572033	7.790115	8.664311	9.806340	10.914810	11.300640	11.677264	12.055664	12.433424	12.812284
15	4.602906	5.232278	6.266281	7.266969	8.558093	9.487734	10.644553	11.756710	12.146464	12.524224	12.899864	13.275524	13.653284
16	5.146214	5.812799	6.914121	7.966969	9.310063	10.304562	11.596311	12.614810	13.004224	13.382984	13.758624	14.135284	14.513044
17	5.707214	6.410171	7.566053	8.672033	10.100063	11.124562	12.406311	13.504810	13.814224	14.182984	14.558624	14.935284	15.313044
18	6.266214	7.016187	8.234121	9.390115	10.909063	11.924562	13.266311	14.374810	14.724224	15.092984	15.468624	15.845284	16.223044
19	6.844214	7.633711	8.919521	10.119033	11.740063	12.744562	14.106311	15.214810	15.574224	15.982984	16.358624	16.735284	17.133044
20	7.432214	8.263799	9.599521	10.949033	12.590063	13.584562	14.996311	16.024810	16.464224	16.872984	17.248624	17.635284	18.033044
21	8.030214	8.906795	10.304121	11.799033	13.460063	14.514562	15.936311	16.914810	17.374224	17.782984	18.138624	18.535284	18.933044
22	8.642214	9.546795	11.034121	12.669033	14.360063	15.414562	16.866311	17.844810	18.284224	18.752984	19.048624	19.445284	19.843044
23	9.262214	10.194795	11.789121	13.559033	15.230063	16.334562	17.826311	18.774810	19.194224	19.662984	20.018624	20.415284	20.813044
24	9.892214	10.850795	12.469121	14.469033	16.120063	17.274562	18.826311	19.724810	20.104224	20.592984	21.048624	21.445284	21.843044
25	10.532214	11.514795	13.174121	15.399033	16.930063	18.244562	19.846311	20.814810	21.014224	21.502984	21.958624	22.355284	22.753044
26	11.182214	12.186795	13.904121	16.349033	17.760063	19.184562	20.936311	21.724810	21.924224	22.412984	22.868624	23.265284	23.663044
27	11.842214	12.866795	14.659121	17.319033	18.610063	20.144562	22.066311	22.614810	22.834224	23.322984	23.778624	24.175284	24.573044
28	12.512214	13.554795	15.439121	18.309033	19.480063	21.134562	23.226311	23.504810	23.744224	24.232984	24.688624	25.085284	25.483044
29	13.192214	14.250795	16.244121	19.319033	20.370063	22.144562	24.306311	24.374810	24.654224	25.142984	25.598624	25.995284	26.393044
30	13.882214	14.954795	17.074121	20.339033	21.280063	23.084562	25.366311	25.244810	25.564224	26.052984	26.508624	26.905284	27.303044