

מבוא למדעי הנתונים

פרק 9 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

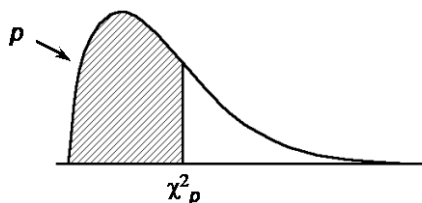
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{רווח הסמך לשונות:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

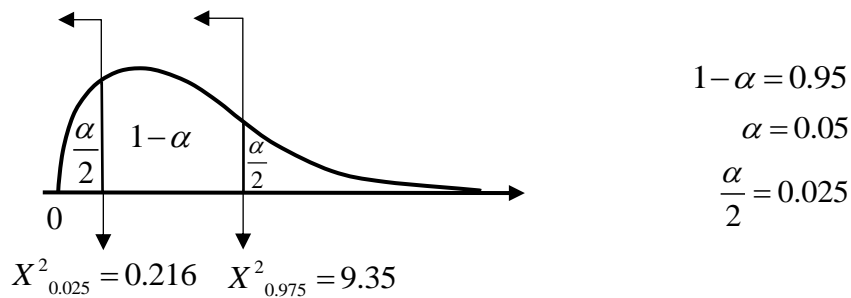
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

(1) $.8.4 < \sigma^2 < 194.2$

(2) א. $.30.285 < \mu < 31.315$ ב. $.0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $.99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $.7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

(4) א. $.68.75 < \mu < 82.15$ ב. $.47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093921	0.125916	0.167656	0.223271
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.210782	0.352729	0.501913	0.675746	0.900000	1.177995	1.577993	2.000000	2.705543
3	0.071714	0.115717	0.216000	0.352729	0.501913	0.675746	0.900000	1.177995	1.577993	2.000000	2.705543	3.841467	5.015817
4	0.207161	0.297181	0.484000	0.711162	1.064500	1.577993	2.365777	3.357056	4.607898	6.092132	7.879128	10.296670	13.276678
5	0.411643	0.554267	0.831000	1.155172	1.610738	2.230128	3.357056	4.607898	6.092132	7.879128	10.296670	13.276678	17.534548
6	0.676005	0.872000	1.240000	1.645562	2.204130	3.000000	4.351464	5.991465	7.879128	10.296670	13.276678	16.755386	22.457716
7	0.989062	1.240000	1.690000	2.179000	2.833058	3.841467	5.398767	7.344143	9.037183	11.030804	13.086268	15.086268	20.277716
8	1.344296	1.650000	2.180000	2.733058	3.490000	4.575650	6.344143	8.329000	10.391533	12.591619	14.447868	16.153646	22.026316
9	1.734724	2.090000	2.700000	3.337058	4.170000	5.300000	6.634143	8.790000	11.388833	13.442967	15.491967	17.534548	23.589334
10	2.160000	2.560000	3.250000	3.940000	4.870000	6.177993	7.344143	8.329000	10.000000	12.591619	14.447868	16.153646	25.188136
11	2.600000	3.050000	3.820000	4.570000	5.580000	6.750000	7.667993	8.590000	10.370000	12.916119	14.847868	16.591619	26.753768
12	3.070000	3.570000	4.400000	5.230000	6.300000	7.200000	8.033058	8.900000	10.812132	13.276670	15.177993	16.917993	28.304734
13	3.570000	4.110000	5.010000	5.890000	7.040000	7.800000	8.433058	9.000000	11.216119	13.677993	15.581619	17.341619	29.819334
14	4.070000	4.660000	5.630000	6.570000	7.790000	8.400000	8.900000	9.400000	11.640000	14.066119	15.977993	17.766119	31.304734
15	4.600000	5.230000	6.260000	7.260000	8.550000	9.000000	9.400000	9.800000	12.033058	14.541619	16.416119	18.241619	32.801334
16	5.140000	5.810000	6.910000	7.960000	9.310000	9.600000	10.000000	10.400000	12.440000	15.016119	16.891619	18.766119	34.277716
17	5.700000	6.410000	7.560000	8.670000	10.100000	10.000000	10.500000	11.000000	12.890000	15.516119	17.391619	19.316119	35.713768
18	6.260000	7.010000	8.230000	9.390000	10.900000	10.600000	11.000000	11.600000	13.400000	16.016119	17.916119	19.891619	37.157716
19	6.840000	7.630000	8.910000	10.100000	11.700000	11.200000	11.500000	12.200000	13.970000	16.541619	18.477993	20.491619	38.584734
20	7.430000	8.260000	9.590000	10.900000	12.400000	11.800000	12.000000	12.800000	14.590000	17.091619	19.041619	21.116119	40.000000
21	8.030000	8.900000	10.300000	11.600000	13.200000	12.400000	12.500000	13.400000	15.170000	17.641619	19.641619	21.766119	41.413768
22	8.640000	9.540000	11.000000	12.300000	14.000000	13.000000	13.000000	14.000000	15.810000	18.216119	20.216119	22.441619	42.797716
23	9.260000	10.200000	11.700000	13.100000	14.800000	13.600000	13.500000	14.600000	16.500000	18.816119	20.816119	23.141619	44.157716
24	9.890000	10.900000	12.400000	13.800000	15.700000	14.200000	14.000000	15.200000	17.240000	19.441619	21.441619	23.866119	45.497716
25	10.500000	11.500000	13.100000	14.600000	16.500000	14.800000	14.500000	15.800000	17.930000	20.091619	22.091619	24.616119	46.813768
26	11.200000	12.200000	13.800000	15.400000	17.300000	15.400000	15.000000	16.400000	18.690000	20.766119	22.766119	25.391619	48.113768
27	11.800000	12.900000	14.600000	16.200000	18.100000	16.000000	15.500000	17.000000	19.510000	21.466119	23.466119	26.191619	49.397716
28	12.500000	13.600000	15.300000	16.900000	18.900000	16.600000	16.000000	17.600000	20.370000	22.191619	24.191619	27.016119	50.666119
29	13.100000	14.300000	16.000000	17.700000	19.800000	17.200000	16.500000	18.200000	21.270000	22.941619	24.941619	27.866119	51.913768
30	13.800000	15.000000	16.800000	18.500000	20.600000	17.800000	17.000000	18.800000	22.200000	23.716119	25.716119	28.741619	53.147716