

# מבוא למדעי הנתונים

פרק 9 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

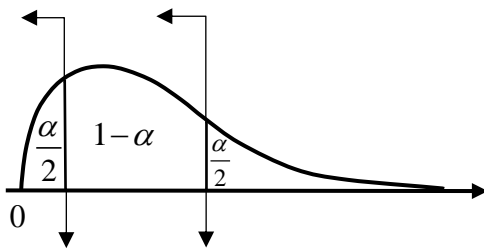
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:  
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.  
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.  
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.  
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093924	0.125916	0.167656	0.223271
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.100000	0.200000	0.300000	0.455996	0.675676	0.921070	1.212859	1.602214	2.000000	2.705543
3	0.071714	0.115717	0.216714	0.352714	0.584714	0.921070	1.391466	1.924548	2.602480	3.347133	4.347827	5.541286	7.377787
4	0.207163	0.297163	0.484163	0.711163	1.061163	1.520777	2.145772	2.878542	3.745377	4.713145	5.988720	7.551533	9.487714
5	0.411619	0.554619	0.831619	1.151619	1.611619	2.230767	3.000767	3.940767	5.023544	6.388693	8.033527	9.886234	12.832502
6	0.676157	0.872157	1.242157	1.642157	2.202157	2.995767	4.052767	5.299767	6.778377	8.558047	10.644645	12.832502	16.755587
7	0.989315	1.242315	1.692315	2.172315	2.832315	3.827767	5.023767	6.344767	8.033527	10.001875	12.591614	15.013787	19.022813
8	1.344296	1.652296	2.182296	2.732296	3.492296	4.575767	5.988767	7.344767	9.147631	11.143286	13.361536	16.013787	20.090228
9	1.734724	2.092724	2.702724	3.332724	4.172724	5.309767	6.894767	8.344767	10.215731	12.257767	14.683614	17.534548	23.589334
10	2.169853	2.562853	3.252853	3.942853	4.872853	6.030767	7.578767	9.033767	10.591400	12.591614	15.013787	18.307034	25.188136
11	2.601329	3.052929	3.822929	4.572929	5.582929	6.756767	8.333767	10.001767	11.779920	14.025573	16.578527	19.675543	26.751533
12	3.074534	3.573034	4.403034	5.233034	6.303034	7.429767	9.236767	11.030767	13.016767	15.188767	17.779920	21.029734	28.304228
13	3.571551	4.113151	5.013151	5.893151	7.043151	8.122767	10.133767	12.160767	14.188767	16.414767	19.022813	22.367714	29.819334
14	4.074296	4.663296	5.633296	6.573296	7.793296	8.995767	11.030767	13.016767	15.215731	17.453767	20.153767	23.684767	31.319334
15	4.602876	5.233476	6.263476	7.263476	8.553476	9.860767	11.923767	14.025573	16.278767	18.493767	21.317767	25.001767	32.801767
16	5.144296	5.813656	6.913656	7.963656	9.313656	10.717767	12.816767	15.013787	17.367767	19.675543	22.453767	26.291767	34.281767
17	5.702876	6.413836	7.563836	8.673836	10.113836	11.610767	13.709767	16.013787	18.493767	20.791767	23.589334	27.589334	35.711767
18	6.262876	7.014016	8.234016	9.394016	10.914016	12.503767	14.602767	17.013787	19.675543	21.923767	24.779920	28.779920	37.151767
19	6.842876	7.634196	8.914196	10.114196	11.714196	13.406767	15.495767	17.906767	20.791767	23.013787	25.969334	29.969334	38.581767
20	7.432876	8.264376	9.594376	10.914376	12.514376	14.309767	16.388767	18.799767	21.923767	24.153767	27.153767	31.153767	40.011767
21	8.032876	8.904556	10.314556	11.614556	13.314556	15.212767	17.281767	19.682767	23.013787	25.343767	28.343767	32.343767	41.441767
22	8.642876	9.544736	11.034736	12.314736	14.114736	16.115767	18.174767	20.575767	24.153767	26.533767	29.533767	33.533767	42.871767
23	9.262876	10.184916	11.754916	13.114916	14.914916	17.008767	19.067767	21.468767	25.243767	27.723767	30.723767	34.723767	44.301767
24	9.892876	10.825096	12.475096	13.815096	15.715096	17.841767	19.960767	22.361767	26.353767	28.913767	31.913767	35.913767	45.731767
25	10.532876	11.465276	13.195276	14.615276	16.515276	18.674767	20.853767	23.254767	27.463767	30.103767	33.103767	37.103767	46.161767
26	11.182876	12.105456	13.915456	15.415456	17.315456	19.517767	21.746767	24.147767	28.573767	31.293767	34.293767	38.293767	47.591767
27	11.842876	12.745636	14.635636	16.215636	18.115636	20.360767	22.639767	25.040767	29.683767	32.483767	35.483767	39.483767	49.021767
28	12.512876	13.385816	15.355816	16.915816	18.915816	21.163767	23.532767	25.933767	30.793767	33.673767	36.673767	40.673767	50.451767
29	13.192876	14.025996	16.075996	17.715996	19.715996	21.966767	24.425767	26.826767	31.903767	34.863767	37.863767	41.863767	51.881767
30	13.882876	14.666176	16.796176	18.516176	20.516176	22.769767	25.318767	27.719767	33.013787	36.053767	39.053767	43.053767	53.311767