

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 17 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן (יחידה 11)

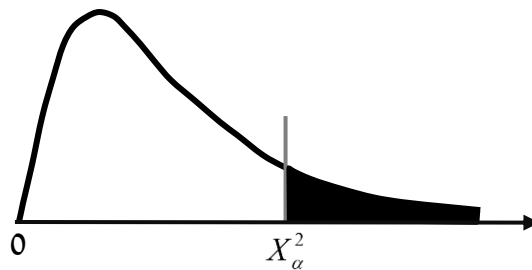
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

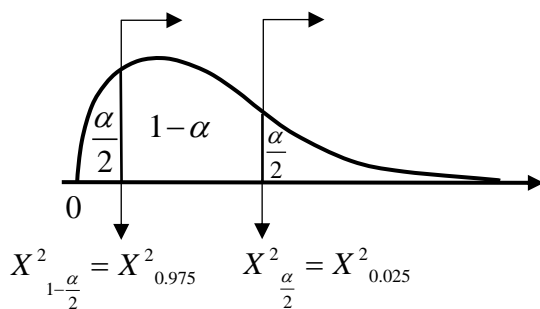
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

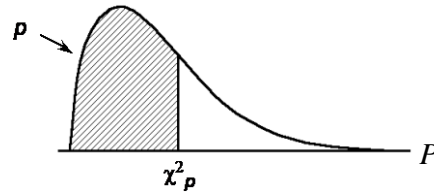
(1) $.8.4 < \sigma^2 < 194.2$

(2) א. $30.285 < \mu < 31.315$ ב. $0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.
 בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.

(4) א. $68.75 < \mu < 82.15$ ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.035793	0.054129	0.075789	0.101308	0.135785	0.175346	0.233847
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.210782	0.352729	0.501219	0.717142	0.915122	1.101778	1.384843	1.675948	2.000000
3	0.071714	0.115717	0.216754	0.352729	0.501219	0.717142	0.915122	1.101778	1.384843	1.675948	2.000000	2.364515	2.833058
4	0.207163	0.297772	0.484432	0.717142	1.064494	1.508528	2.000000	2.472532	2.964535	3.485015	4.044913	4.607893	5.385317
5	0.411643	0.554267	0.831439	1.157161	1.610738	2.204169	2.964535	3.675091	4.351464	5.012537	5.688845	6.368803	7.287872
6	0.676068	0.872273	1.238562	1.635309	2.204169	2.964535	3.675091	4.351464	5.012537	5.688845	6.368803	7.052147	8.033527
7	0.989266	1.240133	1.690865	2.179750	2.833058	3.599171	4.351464	5.012537	5.688845	6.368803	7.052147	7.779435	8.848639
8	1.344296	1.649773	2.180094	2.733062	3.490295	4.299505	5.012537	5.688845	6.368803	7.052147	7.779435	8.534834	9.717654
9	1.734724	2.099879	2.700108	3.337143	4.168223	4.878303	5.688845	6.368803	7.052147	7.779435	8.534834	9.347826	10.557165
10	2.160133	2.560000	3.250133	3.940295	4.878303	5.688845	6.368803	7.052147	7.779435	8.534834	9.347826	10.178136	11.154771
11	2.602521	3.050000	3.820133	4.578303	5.588303	6.368803	7.052147	7.779435	8.534834	9.347826	10.178136	11.008534	11.815551
12	3.076377	3.570000	4.400133	5.230133	6.308303	7.052147	7.779435	8.534834	9.347826	10.178136	11.008534	11.871334	12.567581
13	3.571847	4.110000	5.010133	5.890133	7.040133	7.779435	8.534834	9.347826	10.178136	11.008534	11.871334	12.741334	13.381334
14	4.077893	4.660000	5.630133	6.570133	7.790133	8.534834	9.347826	10.178136	11.008534	11.871334	12.741334	13.617334	14.257334
15	4.602521	5.230000	6.260133	7.260133	8.550133	9.347826	10.178136	11.008534	11.871334	12.741334	13.617334	14.507334	15.195334
16	5.144296	5.810000	6.910133	7.960133	9.310133	10.178136	11.008534	11.871334	12.741334	13.617334	14.507334	15.417334	16.195334
17	5.702521	6.410000	7.560133	8.670133	10.100133	11.008534	11.871334	12.741334	13.617334	14.507334	15.417334	16.327334	17.257334
18	6.264296	7.010000	8.230133	9.390133	10.900133	11.871334	12.741334	13.617334	14.507334	15.417334	16.327334	17.237334	18.381334
19	6.840133	7.630000	8.910133	10.100133	11.700133	12.741334	13.617334	14.507334	15.417334	16.327334	17.237334	18.177334	19.567334
20	7.430133	8.260000	9.590133	10.900133	12.400133	13.617334	14.507334	15.417334	16.327334	17.237334	18.177334	19.077334	20.817334
21	8.030133	8.900000	10.300133	11.600133	13.200133	14.507334	15.417334	16.327334	17.237334	18.177334	19.077334	19.987334	22.131334
22	8.640133	9.540000	11.000133	12.300133	14.000133	15.417334	16.327334	17.237334	18.177334	19.077334	19.987334	20.897334	23.511334
23	9.260133	10.200000	11.700133	13.100133	14.800133	16.327334	17.237334	18.177334	19.077334	19.987334	20.897334	21.807334	24.951334
24	9.890133	10.900000	12.400133	13.800133	15.700133	17.237334	18.177334	19.077334	19.987334	20.897334	21.807334	22.717334	26.451334
25	10.500133	11.500000	13.100133	14.600133	16.500133	18.177334	19.077334	19.987334	20.897334	21.807334	22.717334	23.627334	28.011334
26	11.200133	12.200000	13.800133	15.400133	17.300133	19.077334	19.987334	20.897334	21.807334	22.717334	23.627334	24.537334	29.631334
27	11.800133	12.900000	14.600133	16.200133	18.100133	19.987334	20.897334	21.807334	22.717334	23.627334	24.537334	25.447334	31.311334
28	12.500133	13.600000	15.300133	16.900133	18.900133	20.897334	21.807334	22.717334	23.627334	24.537334	25.447334	26.357334	33.051334
29	13.100133	14.300000	16.000133	17.700133	19.800133	21.807334	22.717334	23.627334	24.537334	25.447334	26.357334	27.267334	34.851334
30	13.800133	15.000000	16.800133	18.500133	20.600133	22.717334	23.627334	24.537334	25.447334	26.357334	27.267334	28.177334	36.711334