

# קורס השלמת סטטיסטיקה לתואר שני

פרק 19 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

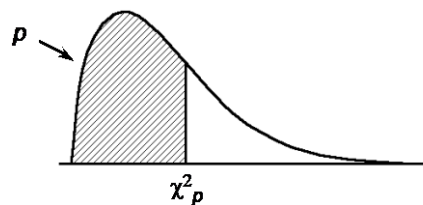
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

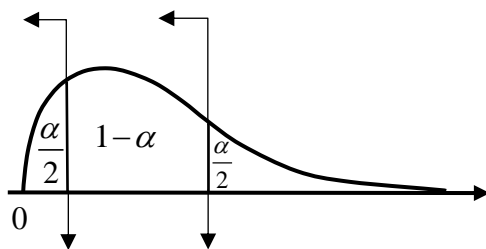
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:  
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.  
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.  
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.  
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.  
 ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.013445	0.020002	0.037467	0.054129	0.700143	1.320764	1.636749	2.000133	2.338465	2.701105
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.214778	0.575554	1.390231	2.770553	4.605170	5.987774	7.377787	9.210743	10.591422
3	0.071714	0.115717	0.216710	0.352729	0.584413	1.212768	2.370152	4.110733	6.251391	7.814727	9.347826	11.344831	12.838157
4	0.207471	0.297772	0.484417	0.711162	1.064494	1.920907	3.357163	5.390232	7.779435	9.487714	11.141651	13.276678	14.860204
5	0.412454	0.554267	0.831413	1.154779	1.610732	2.675786	4.351464	6.626127	9.246453	11.141651	12.838157	15.086250	16.750415
6	0.676147	0.872243	1.240131	1.645561	2.202770	3.450293	5.349153	7.879152	10.644645	12.591619	14.451417	16.750415	18.547729
7	0.989266	1.240131	1.690222	2.179002	2.833058	4.254799	6.346877	9.040897	12.016770	14.164574	16.012784	18.475309	20.277713
8	1.344296	1.650043	2.180091	2.733062	3.490295	5.070831	7.344187	10.215707	13.361536	15.507733	17.534548	20.090228	22.026316
9	1.734724	2.090232	2.700108	3.337133	4.170898	5.900156	8.340734	11.416654	14.690596	16.919003	19.022831	21.665991	23.589312
10	2.160132	2.560000	3.250133	3.940293	4.870893	6.740154	9.340734	12.591619	16.012784	18.307037	20.530905	23.200798	25.188138
11	2.602579	3.050000	3.820133	4.570293	5.580893	7.580154	10.340734	13.700733	17.337546	19.678126	21.900798	24.724952	26.756416
12	3.074534	3.570000	4.400133	5.230293	6.300893	8.440154	11.340734	14.800733	18.549423	21.029563	23.337546	26.217065	28.304225
13	3.571430	4.110000	5.010133	5.890293	7.040893	9.300154	12.340734	16.000733	19.812461	22.400798	24.724952	27.688138	29.819772
14	4.070000	4.660000	5.630133	6.570293	7.790893	10.200154	13.340734	17.100733	21.100798	23.680798	26.119003	29.140798	31.319296
15	4.600000	5.230000	6.260133	7.260293	8.550893	11.100154	14.340734	18.200733	22.300798	25.000798	27.500798	30.579800	32.801328
16	5.140000	5.810000	6.910133	7.960293	9.310893	11.900154	15.340734	19.400733	23.500798	26.300798	28.800798	32.000798	34.279800
17	5.700000	6.410000	7.560133	8.670293	10.100893	12.800154	16.340734	20.500733	24.800798	27.600798	30.200798	33.400798	35.700798
18	6.260000	7.010000	8.230133	9.390293	10.900893	13.700154	17.340734	21.600733	26.000798	28.900798	31.500798	34.800798	37.150798
19	6.840000	7.630000	8.910133	10.100293	11.700893	14.600154	18.340734	22.700733	27.200798	30.100798	32.900798	36.200798	38.580798
20	7.430000	8.260000	9.590133	10.900293	12.400893	15.500154	19.340734	23.800733	28.400798	31.400798	34.200798	37.600798	40.000798
21	8.030000	8.900000	10.300133	11.600293	13.200893	16.300154	20.340734	24.900733	29.600798	32.700798	35.500798	38.900798	41.400798
22	8.640000	9.540000	11.000133	12.300293	14.000893	17.200154	21.340734	26.000733	30.800798	33.900798	36.800798	40.300798	42.800798
23	9.260000	10.200000	11.700133	13.100293	14.800893	18.100154	22.340734	27.100733	32.000798	35.200798	38.100798	41.600798	44.200798
24	9.890000	10.900000	12.400133	13.800293	15.700893	19.000154	23.340734	28.200733	33.200798	36.400798	39.400798	43.000798	45.600798
25	10.500000	11.500000	13.100133	14.600293	16.500893	19.900154	24.340734	29.300733	34.400798	37.700798	40.600798	44.300798	46.900798
26	11.200000	12.200000	13.800133	15.400293	17.300893	20.800154	25.340734	30.400733	35.600798	38.900798	41.900798	45.600798	48.300798
27	11.800000	12.900000	14.600133	16.200293	18.100893	21.700154	26.340734	31.500733	36.700798	40.100798	43.200798	47.000798	49.600798
28	12.500000	13.600000	15.300133	16.900293	18.900893	22.700154	27.340734	32.600733	37.900798	41.300798	44.500798	48.300798	51.000798
29	13.100000	14.300000	16.000133	17.700293	19.800893	23.600154	28.340734	33.700733	39.100798	42.600798	45.700798	49.600798	52.300798
30	13.800000	15.000000	16.800133	18.500293	20.600893	24.500154	29.340734	34.800733	40.300798	43.800798	47.000798	50.900798	53.700798