

# סטטיסטיקה

פרק 9 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

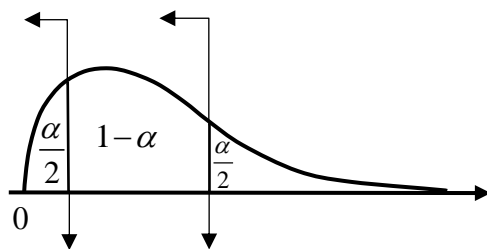
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

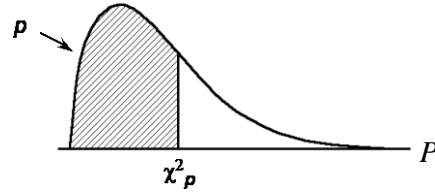
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

**נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :**


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093924	0.125916	0.167656	0.223271
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.100000	0.200000	0.300000	0.400000	0.475000	0.541296	0.597193	0.639127	0.674540	0.702776
3	0.071714	0.115777	0.216000	0.352928	0.584350	0.924540	1.212800	1.304328	1.391549	1.454549	1.495593	1.525712	1.549861
4	0.207161	0.297865	0.484432	0.711392	1.064500	1.625560	2.201800	2.364557	2.435292	2.478630	2.507091	2.527903	2.543320
5	0.411638	0.554267	0.831439	1.155379	1.610708	2.335944	3.000800	3.219727	3.290515	3.323434	3.347344	3.363442	3.374540
6	0.675654	0.872283	1.236777	1.635309	2.204169	3.000800	3.852200	4.101435	4.162223	4.195142	4.219052	4.235150	4.246248
7	0.989266	1.240131	1.690766	2.179894	2.833059	3.852200	4.848200	5.097435	5.158223	5.191142	5.215052	5.231150	5.242248
8	1.344296	1.650063	2.180091	2.732637	3.490352	4.575800	5.634800	5.884035	5.944823	5.977742	5.993652	6.009750	6.020848
9	1.734724	2.099893	2.700109	3.335714	4.167557	5.300800	6.378200	6.627435	6.688223	6.721142	6.737052	6.753150	6.764248
10	2.160131	2.560063	3.250109	3.940352	4.870352	6.000800	7.178200	7.427435	7.488223	7.521142	7.537052	7.553150	7.564248
11	2.602571	3.050131	3.820109	4.570352	5.580352	6.750800	7.958200	8.207435	8.268223	8.301142	8.317052	8.333150	8.344248
12	3.073792	3.570131	4.400109	5.230352	6.300352	7.550800	8.768200	9.017435	9.078223	9.111142	9.127052	9.143150	9.154248
13	3.571438	4.110131	5.010109	5.890352	7.040352	8.300800	9.518200	9.767435	9.828223	9.861142	9.877052	9.893150	9.904248
14	4.073792	4.660131	5.630109	6.570352	7.790352	9.020800	10.238200	10.487435	10.548223	10.581142	10.597052	10.613150	10.624248
15	4.602571	5.230131	6.260109	7.260352	8.550352	9.780800	10.958200	11.207435	11.268223	11.301142	11.317052	11.333150	11.344248
16	5.142571	5.810131	6.910109	7.960352	9.310352	10.580800	11.768200	12.017435	12.078223	12.111142	12.127052	12.143150	12.154248
17	5.702571	6.410131	7.560109	8.670352	10.100352	11.450800	12.338200	12.587435	12.648223	12.681142	12.697052	12.713150	12.724248
18	6.262571	7.010131	8.230109	9.390352	10.900352	12.150800	12.638200	12.887435	12.948223	12.981142	12.997052	13.013150	13.024248
19	6.842571	7.630131	8.910109	10.100352	11.700352	12.950800	13.338200	13.587435	13.648223	13.681142	13.697052	13.713150	13.724248
20	7.432571	8.260131	9.590109	10.900352	12.400352	13.700800	13.958200	14.207435	14.268223	14.301142	14.317052	14.333150	14.344248
21	8.032571	8.900131	10.300109	11.600352	13.200352	14.050800	14.208200	14.457435	14.518223	14.551142	14.567052	14.583150	14.594248
22	8.642571	9.540131	11.000109	12.300352	14.000352	14.900800	14.458200	14.707435	14.768223	14.801142	14.817052	14.833150	14.844248
23	9.262571	10.200131	11.700109	13.100352	14.800352	15.650800	14.708200	14.957435	15.018223	15.051142	15.067052	15.083150	15.094248
24	9.892571	10.900131	12.400109	13.800352	15.600352	16.400800	14.958200	15.207435	15.268223	15.301142	15.317052	15.333150	15.344248
25	10.532571	11.600131	13.100109	14.600352	16.400352	17.150800	15.208200	15.457435	15.518223	15.551142	15.567052	15.583150	15.594248
26	11.182571	12.300131	13.800109	15.400352	17.300352	17.900800	15.458200	15.707435	15.768223	15.801142	15.817052	15.833150	15.844248
27	11.842571	12.900131	14.600109	16.200352	18.100352	18.650800	15.708200	15.957435	16.018223	16.051142	16.067052	16.083150	16.094248
28	12.512571	13.600131	15.300109	16.900352	18.900352	19.400800	15.958200	16.207435	16.268223	16.301142	16.317052	16.333150	16.344248
29	13.182571	14.300131	16.000109	17.700352	19.700352	20.150800	16.208200	16.457435	16.518223	16.551142	16.567052	16.583150	16.594248
30	13.862571	15.000131	16.800109	18.500352	20.600352	20.900800	16.458200	16.707435	16.768223	16.801142	16.817052	16.833150	16.844248