

סטטיסטיקה והסתברות 01 88165

פרק 64 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

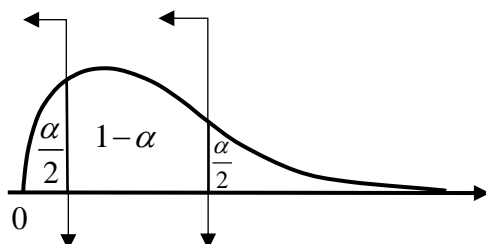
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

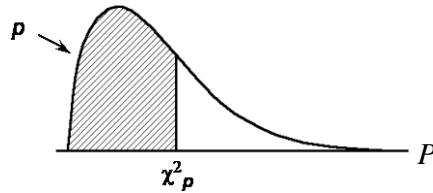
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023381	0.035793	0.050918	0.071724	0.098461	0.137808	0.190232	0.261493
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.352729	0.505131	0.717242	0.984612	1.378077	1.902328	2.614929	3.579296
3	0.071717	0.115777	0.216454	0.352729	0.505131	0.717242	0.984612	1.378077	1.902328	2.614929	3.579296	4.607893	5.991465
4	0.207163	0.297872	0.484418	0.711162	1.064554	1.520696	2.147783	2.964565	4.101385	5.407791	7.109572	9.348405	12.838158
5	0.411643	0.554267	0.831476	1.155371	1.610740	2.231814	3.000795	4.051902	5.407791	7.109572	9.348405	12.838158	17.534548
6	0.676005	0.872273	1.240133	1.645562	2.204169	3.000795	4.051902	5.407791	7.109572	9.348405	12.838158	17.534548	23.684794
7	0.989266	1.240133	1.645562	2.204169	3.000795	4.051902	5.407791	7.109572	9.348405	12.838158	17.534548	23.684794	31.526479
8	1.344296	1.645562	2.204169	3.000795	4.051902	5.407791	7.109572	9.348405	12.838158	17.534548	23.684794	31.526479	41.922604
9	1.734724	2.093029	2.700390	3.579296	4.713145	6.251351	8.341734	11.024702	14.454089	18.907011	25.188136	33.182237	44.984634
10	2.160133	2.564974	3.250133	4.167557	5.412161	7.172014	9.590895	12.591585	16.919089	22.568313	29.588323	38.581334	51.922604
11	2.602579	3.052768	3.820133	4.779296	6.177868	8.187014	10.845398	14.328014	19.022839	25.188136	33.182237	44.984634	60.257521
12	3.076473	3.571773	4.400133	5.412161	7.031461	9.348405	12.591585	16.919089	22.568313	29.588323	38.581334	51.922604	69.657713
13	3.571773	4.110133	5.010133	6.077868	7.963268	10.591461	14.167557	18.907011	25.188136	33.182237	44.984634	60.257521	80.639760
14	4.077868	4.660133	5.630133	6.756473	7.963268	10.591461	14.167557	18.907011	25.188136	33.182237	44.984634	60.257521	93.214294
15	4.602579	5.230133	6.260133	7.460133	8.537868	11.338158	15.085398	20.277661	27.488136	36.190895	47.792969	63.691465	108.639760
16	5.140133	5.810133	6.910133	8.187014	9.348405	12.591585	16.919089	22.568313	29.588323	38.581334	51.922604	69.657713	126.752133
17	5.700133	6.410133	7.560133	8.963268	10.177868	13.780133	18.475398	24.768313	32.907011	42.792969	57.152133	76.152133	147.577133
18	6.260133	7.010133	8.230133	9.792969	10.992969	14.838158	20.090895	27.152133	36.190895	47.792969	63.691465	84.652133	171.429690
19	6.840133	7.630133	8.910133	10.677868	11.807868	16.013314	21.338158	29.588323	39.588323	51.922604	69.657713	93.214294	198.657713
20	7.430133	8.260133	9.590133	11.610133	12.632969	17.338158	23.187557	31.526479	42.792969	57.152133	76.152133	103.214294	229.984634
21	8.030133	8.900133	10.300133	12.560133	13.477868	18.792969	25.188136	33.182237	46.792969	62.152133	84.652133	114.652133	265.984634
22	8.640133	9.540133	11.030133	13.510133	14.342969	20.338158	27.488136	36.190895	50.984634	70.152133	93.214294	127.152133	307.984634
23	9.260133	10.200133	11.770133	14.480133	15.230133	22.152133	30.429690	40.792969	56.152133	77.152133	103.214294	140.652133	356.984634
24	9.890133	10.900133	12.440133	15.410133	16.140133	24.013314	34.429690	46.792969	63.691465	87.152133	117.152133	155.652133	413.984634
25	10.550133	11.550133	13.140133	16.340133	17.080133	26.152133	39.588323	53.984634	73.152133	100.152133	134.652133	172.152133	480.984634
26	11.200133	12.200133	13.880133	17.300133	18.040133	28.538158	44.984634	62.152133	83.152133	114.652133	155.652133	191.652133	559.984634
27	11.850133	12.900133	14.640133	18.290133	19.030133	31.152133	51.922604	73.152133	97.152133	134.652133	181.652133	214.652133	652.984634
28	12.500133	13.600133	15.430133	19.300133	20.040133	34.013314	60.792969	84.652133	114.652133	159.652133	214.652133	241.652133	761.984634
29	13.150133	14.300133	16.240133	20.340133	21.080133	37.152133	72.152133	97.152133	139.652133	184.652133	254.652133	271.652133	888.984634
30	13.800133	15.000133	17.080133	21.430133	22.140133	40.538158	83.152133	114.652133	164.652133	219.652133	299.652133	304.652133	1035.984634