

סטטיסטיקה והסתברות 01 88165

פרק 64 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{רווח הסמך לשונות:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

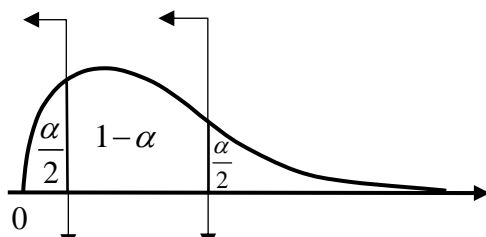
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

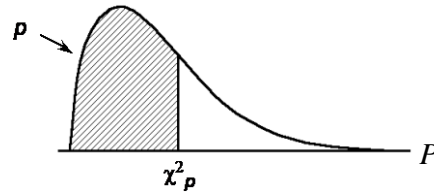
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020002	0.037467	0.102430	1.320321	2.705543	3.841463	5.023890	6.634896	7.879440
2	0.010000	0.020000	0.050616	0.103823	0.210782	0.575554	1.390231	2.770677	4.605492	5.991465	7.377757	9.210744	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216746	0.352729	0.584350	1.212765	2.370153	4.110825	6.251352	7.814727	9.347825	11.344831	12.838158
4	0.207581	0.297871	0.484418	0.711392	1.064495	1.920907	3.358167	5.398767	7.779435	9.487714	11.141651	13.276678	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831439	1.154922	1.610738	2.675812	4.351464	6.626120	9.246453	11.070499	12.838158	15.088250	16.750415
6	0.675650	0.872083	1.238562	1.635309	2.204130	3.453383	5.348153	7.879440	10.644645	12.591600	14.449130	16.750415	18.547564
7	0.989266	1.239843	1.690866	2.179005	2.833058	4.253859	6.346835	9.037135	12.016778	14.164578	16.012784	18.475309	20.277561
8	1.344296	1.649738	2.179005	2.732637	3.490153	5.070832	7.344187	10.215707	13.361536	15.507713	17.534548	20.090231	22.026316
9	1.734724	2.090231	2.700108	3.337133	4.168223	5.903855	8.340734	11.388830	14.690596	16.919000	19.022813	21.665991	23.589313
10	2.169901	2.565834	3.246373	3.940347	4.875269	6.749955	9.347825	12.591600	16.012784	18.307030	20.530900	23.200714	25.188150
11	2.601003	3.052860	3.820891	4.575829	5.581415	7.578353	10.370339	13.700537	17.337370	19.678052	21.912620	24.724954	26.756850
12	3.076472	3.571846	4.401299	5.229655	6.302137	8.440170	11.334464	14.800831	18.575913	21.029563	23.336667	26.217065	28.304210
13	3.571846	4.110825	5.010814	5.891911	7.041502	9.302489	12.338003	16.000030	19.811903	22.478612	24.735593	27.688203	29.819104
14	4.075724	4.669738	5.630814	6.570867	7.790115	10.215707	13.337370	17.153828	21.064146	23.684671	26.119321	29.141223	31.319246
15	4.602914	5.230231	6.261538	7.262157	8.553768	11.141651	14.338003	18.245953	22.307632	25.000136	27.587113	30.578438	32.801303
16	5.143287	5.811463	6.913299	7.966005	9.319645	11.998543	15.338003	19.442713	23.541867	26.296231	28.845030	32.000231	34.266503
17	5.706472	6.412714	7.566005	8.672637	10.117000	12.838158	16.338003	20.592867	24.796151	27.591267	30.191065	33.408714	35.718150
18	6.261538	7.014165	8.230814	9.390115	10.998543	13.700537	17.334464	21.665991	26.010799	28.869100	31.526316	34.802031	37.153760
19	6.840115	7.630231	8.911463	10.117000	11.770115	14.690596	18.307030	22.770115	27.203530	30.143530	32.909530	36.190714	38.581260
20	7.430231	8.261538	9.591267	10.998543	12.442713	15.507713	19.338003	23.885309	28.418581	31.410430	34.200714	37.566430	40.000000
21	8.030231	8.901267	10.300000	11.665991	13.210744	16.338003	20.338003	24.995953	29.645309	32.671530	35.563667	38.932113	41.401260
22	8.640115	9.541267	11.030231	12.338003	14.030231	17.210744	21.338003	26.010799	30.813530	33.901267	36.781267	40.289316	42.796430
23	9.261538	10.210744	11.770115	13.110744	14.860204	18.110744	22.338003	27.153828	32.000136	35.200136	38.110744	41.634530	44.181260
24	9.890115	10.910744	12.442713	13.860204	15.700115	19.030231	23.338003	28.245953	33.200136	36.410744	39.410744	43.000136	45.566430
25	10.530231	11.570115	13.110744	14.660204	16.550115	19.910744	24.338003	29.338003	34.410744	37.700136	40.660204	44.310744	46.910744
26	11.200115	12.260115	13.860204	15.460204	17.360204	20.830231	25.338003	30.410744	35.610744	38.910744	41.910744	45.610744	48.300115
27	11.860204	12.970115	14.660204	16.260204	18.160204	21.770115	26.338003	31.510744	36.710744	40.110744	43.210744	47.010744	49.660204
28	12.530231	13.660204	15.338003	16.990115	18.960204	22.700115	27.338003	32.610744	37.910744	41.310744	44.510744	48.310744	51.010744
29	13.160204	14.360204	16.030231	17.700115	19.760204	23.660204	28.338003	33.710744	39.110744	42.610744	45.710744	49.610744	52.310744
30	13.810744	15.060204	16.810744	18.510744	20.610744	24.560204	29.338003	34.810744	40.310744	43.810744	47.010744	50.910744	53.710744