

# מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

פרק 11 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

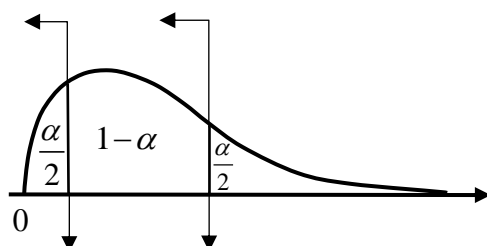
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

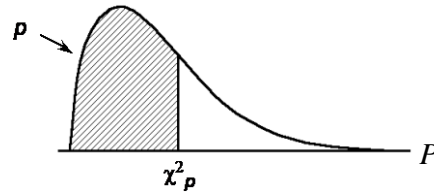
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

**נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :**


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007879	0.013503	0.020001	0.037467	0.054129	0.102430	0.139778	0.175396	0.214770	0.248602	0.283361
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.352729	0.455787	0.579488	0.717798	0.838789	0.987789	1.101789	1.219789
3	0.071717	0.115717	0.216717	0.352717	0.584717	0.711717	0.921717	1.102717	1.219717	1.376717	1.501717	1.636717	1.781717
4	0.207207	0.297207	0.484207	0.711207	1.062207	1.392207	1.754207	2.146207	2.478207	2.748207	3.004207	3.247207	3.477207
5	0.412412	0.554412	0.831412	1.152412	1.612412	2.204412	2.964412	3.846412	4.758412	5.620412	6.388412	7.042412	7.682412
6	0.676676	0.872676	1.242676	1.642676	2.202676	2.964676	3.918676	5.024676	6.190676	7.234676	8.114676	8.934676	9.694676
7	0.989989	1.242989	1.692989	2.172989	2.832989	3.754989	4.918989	6.204989	7.578989	8.718989	9.638989	10.398989	11.148989
8	1.341341	1.652341	2.182341	2.732341	3.492341	4.574341	5.918341	7.342341	8.846341	10.134341	11.198341	12.034341	12.764341
9	1.731731	2.092731	2.702731	3.332731	4.172731	5.394731	6.918731	8.542731	10.296731	11.784731	12.938731	13.884731	14.734731
10	2.162162	2.562162	3.252162	3.942162	4.872162	6.174162	7.878162	9.592162	11.476162	13.018162	14.338162	15.392162	16.312162
11	2.602602	3.052602	3.822602	4.572602	5.582602	7.044602	8.918602	10.842602	12.916602	14.634602	16.118602	17.192602	18.142602
12	3.073073	3.573073	4.403073	5.233073	6.303073	7.944073	10.018073	12.172073	14.416073	16.318073	17.738073	18.912073	19.962073
13	3.573573	4.113573	5.013573	5.893573	7.043573	8.934573	11.238573	13.612573	16.036573	18.118573	20.018573	21.332573	22.512573
14	4.074074	4.664074	5.634074	6.574074	7.794074	9.924074	12.518074	15.032074	17.616074	19.834074	22.198074	23.632074	24.812074
15	4.604604	5.234604	6.264604	7.264604	8.554604	11.044604	13.818604	16.512604	19.236604	22.318604	24.798604	26.332604	27.512604
16	5.145145	5.815145	6.915145	7.965145	9.315145	11.944514	15.318514	18.412514	21.536514	24.738514	27.798514	29.432514	30.312514
17	5.705705	6.415705	7.565705	8.675705	10.115705	12.844705	16.318705	19.812705	23.516705	27.238705	30.618705	32.532705	33.712705
18	6.266266	7.016266	8.236266	9.396266	10.916266	13.774266	17.318266	21.112266	25.018266	28.938266	31.518266	34.832266	36.212266
19	6.846846	7.636846	8.916846	10.116846	11.716846	14.674684	18.318684	22.712684	27.236684	30.118684	32.938684	36.232684	38.612684
20	7.437437	8.267437	9.597437	10.917437	12.417437	15.544743	19.318743	23.812743	28.436743	31.418743	34.238743	37.632743	40.012743
21	8.038038	8.908038	10.38038	11.618038	13.218038	16.344803	20.318803	24.912803	29.636803	32.718803	35.538803	38.932803	41.412803
22	8.648648	9.548648	11.08648	12.318648	14.018648	17.244864	21.318864	26.012864	30.836864	33.918864	36.838864	40.332864	42.812864
23	9.269269	10.269269	11.769269	13.119269	14.819269	18.144926	22.318926	27.112926	32.036926	35.218926	38.138926	41.632926	44.212926
24	9.899899	10.999899	12.499899	13.819899	15.719899	19.044989	23.318989	28.212989	33.236989	36.418989	39.438989	43.032989	45.612989
25	10.530530	11.730530	13.130530	14.610530	16.510530	19.945053	24.319053	29.312053	34.436053	37.719053	40.639053	44.332053	46.912053
26	11.171171	12.471171	13.871171	15.411711	17.311711	20.845117	25.319117	30.412117	35.636117	38.919117	41.939117	45.632117	48.312117
27	11.821821	13.221821	14.621821	16.218211	18.118211	21.745182	26.319182	31.512182	36.736182	40.119182	43.239182	47.032182	49.612182
28	12.482482	13.982482	15.382482	16.918248	18.918248	22.645248	27.319248	32.612248	37.936248	41.319248	44.539248	48.332248	51.012248
29	13.153153	14.753153	16.053153	17.715315	19.815315	23.645315	28.319315	33.712315	39.136315	42.619315	45.739315	49.632315	52.312315
30	13.833838	15.533838	16.833838	18.513838	20.613838	24.545383	29.319383	34.812383	40.336383	43.819383	47.039383	50.932383	53.712383