

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות 2

פרק 14 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{רווח הסמך לשונות:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{כאשר:}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

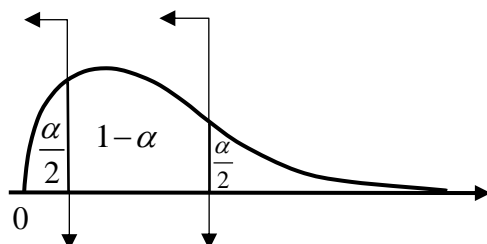
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:
 א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
 ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

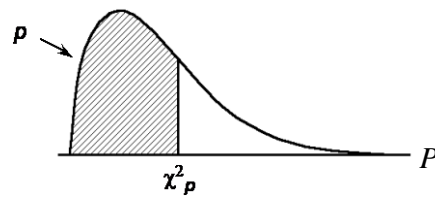
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.046779	0.063889	0.085348	0.111453	0.148602	0.200900
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.374544	0.584358	0.787912	1.064465	1.391549	1.847541	2.447814	3.000793
3	0.071714	0.115717	0.216003	0.352729	0.584358	0.924549	1.212765	1.598722	2.179036	2.833114	3.765252	4.878314	6.251352
4	0.207161	0.297786	0.484432	0.711162	1.064465	1.625561	2.202714	2.875754	3.745348	4.779037	6.094172	7.779435	9.887631
5	0.411643	0.554267	0.831413	1.154824	1.612766	2.335938	3.090235	3.940154	5.023890	6.388869	8.033527	10.134843	12.832497
6	0.675654	0.872226	1.238562	1.635309	2.202714	3.178793	4.101385	5.191502	6.581396	8.230757	10.236853	12.591610	15.705428
7	0.989266	1.240052	1.690766	2.179036	2.833114	3.827756	4.964654	6.344544	8.033527	9.887631	12.016778	14.449126	18.475176
8	1.344296	1.650007	2.179036	2.732637	3.490055	4.575829	5.988622	7.591439	9.524517	11.628790	13.888373	16.012764	20.090030
9	1.734724	2.093024	2.700108	3.337133	4.167557	5.348156	6.895857	8.799157	11.017789	13.361536	15.987483	18.475176	23.589334
10	2.169772	2.565884	3.246951	3.940154	4.878314	6.177903	7.879154	10.028853	12.591610	15.491961	18.307037	21.154265	25.188150
11	2.601054	3.052860	3.827756	4.575829	5.588454	6.958045	8.799157	10.928229	13.580471	16.578556	19.678059	22.995772	26.756853
12	3.076472	3.571846	4.401598	5.230215	6.303912	7.675754	9.524517	11.779296	14.667789	17.779435	20.530879	24.226024	28.304243
13	3.571846	4.111924	5.010804	5.891459	7.041512	8.420781	10.384793	12.591610	15.779037	18.907037	21.900922	25.518233	29.819549
14	4.077220	4.662003	5.630598	6.572912	7.791561	9.274354	11.233527	13.442961	16.924517	20.154265	23.200900	26.893126	31.316965
15	4.602601	5.232082	6.260793	7.262657	8.552561	10.162766	12.164544	14.333114	18.149610	21.578556	24.601352	28.362643	32.801352
16	5.147976	5.812161	6.910484	7.960766	9.310766	11.084354	13.010766	15.233114	19.333114	23.027143	26.010766	30.190373	34.266453
17	5.702351	6.412240	7.560175	8.670484	10.110766	12.000766	13.924517	16.133114	20.530879	24.433114	27.591610	31.576453	35.712030
18	6.266726	7.012319	8.230261	9.390766	10.928229	13.010766	14.879154	17.091502	21.667789	25.991610	29.161536	32.907037	37.157143
19	6.841101	7.632398	8.910348	10.110766	11.779296	14.060766	15.864544	18.190373	22.824517	27.578556	30.576453	34.281265	38.584243
20	7.435476	8.262477	9.590435	10.928229	12.638853	15.084354	16.879154	19.333114	24.010766	29.190373	32.178556	35.576453	40.000000
21	8.039851	8.902556	10.300522	11.779296	13.510766	16.133114	17.924517	20.530879	25.188150	30.810766	33.410766	36.933114	41.412643
22	8.644226	9.542635	11.030609	12.638853	14.400766	17.200766	19.064544	21.724517	26.401352	32.010766	34.703733	38.310766	42.825286
23	9.248601	10.182714	11.779296	13.510766	15.300766	18.110766	20.233114	22.991610	27.690373	33.601352	36.064544	39.710766	44.237929
24	9.852976	10.822793	12.538383	14.400766	16.200766	19.060766	21.333114	24.161502	28.980373	35.190373	37.491610	41.134843	45.650572
25	10.457351	11.462872	13.306070	15.300766	17.100766	19.960766	22.410766	25.333114	30.271435	36.364544	38.933114	42.591610	46.991610
26	11.061726	12.102951	14.083757	16.200766	18.000766	20.860766	23.510766	26.530879	31.561536	37.591610	40.210766	44.064544	48.364544
27	11.666101	12.743030	14.871444	17.100766	18.900766	21.770766	24.664544	27.791610	32.933114	38.864544	41.510766	45.576453	49.677187
28	12.270476	13.383109	15.669131	18.000766	19.800766	22.670766	25.833114	29.064544	34.333114	40.210766	42.864544	47.064544	51.000000
29	12.874851	14.023188	16.476818	18.900766	20.700766	23.570766	26.933114	30.233114	35.791610	41.601352	44.210766	48.542643	52.342643
30	13.479226	14.663267	17.294505	19.800766	21.600766	24.470766	28.064544	31.530879	37.264544	43.064544	45.601352	49.991610	53.700000