

מבוא לסטטיסטיקה ב

פרק 18 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

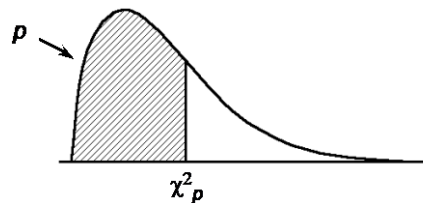
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

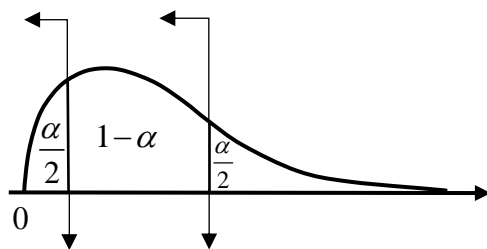
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

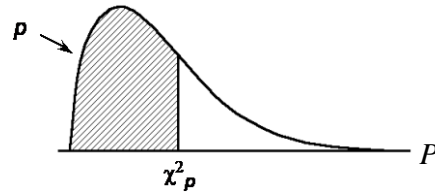
$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.013498	0.020097	0.033471	0.054127	0.700143	1.320764	1.636749	2.000133	2.302847	2.700377
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.214778	0.352929	0.575540	1.390230	2.770553	3.000000	3.778769	4.605170	5.023890
3	0.071714	0.115777	0.216000	0.352929	0.584350	0.924549	1.212760	2.370152	4.110733	4.607893	5.548186	6.251362	6.934818
4	0.207163	0.297865	0.484432	0.711162	1.064554	1.520676	2.000133	3.360771	5.390787	6.092133	7.108410	7.879130	8.484672
5	0.411643	0.554267	0.831439	1.154822	1.610775	2.230122	2.964565	4.350193	6.630790	7.377787	8.537873	9.348403	10.000000
6	0.675650	0.872243	1.238562	1.635309	2.204130	3.000133	3.933122	5.335733	7.840808	8.558046	9.886231	10.644645	11.337873
7	0.989266	1.240133	1.690865	2.179002	2.833058	3.827756	4.779152	6.346667	9.040847	9.886231	11.337873	12.017034	12.591619
8	1.344296	1.649773	2.180091	2.732637	3.490451	4.575829	5.527938	7.344187	10.215390	11.148353	12.750112	13.361536	14.067160
9	1.734724	2.099879	2.700108	3.337133	4.168223	5.309044	6.255122	8.340733	11.388830	12.242201	13.888373	14.567534	15.338711
10	2.169905	2.560000	3.250133	3.940347	4.875270	6.037079	6.934818	9.340733	12.591619	13.442443	14.690546	15.490707	16.590546
11	2.602579	3.050000	3.820133	4.575829	5.581416	6.756479	7.675122	10.370152	13.700553	14.690546	15.987731	16.750133	17.779130
12	3.076472	3.570000	4.400133	5.230215	6.302187	7.266969	8.210676	11.337873	14.800847	15.707534	16.919002	17.779130	18.575133
13	3.571847	4.110000	5.010000	5.890232	7.041451	7.927756	8.933122	12.337873	16.000133	16.919002	18.000133	18.907534	19.675133
14	4.077730	4.660000	5.630000	6.570133	7.790133	8.675122	9.700133	13.337873	17.150133	18.000133	19.148353	20.000133	20.675133
15	4.602579	5.230000	6.260000	7.260133	8.550133	9.433122	10.500133	14.337873	18.300133	19.148353	20.337873	21.000133	21.675133
16	5.140000	5.810000	6.910000	7.960133	9.310133	10.166969	11.337873	15.337873	19.400133	20.337873	21.675133	22.000133	22.675133
17	5.700000	6.410000	7.560000	8.670133	10.100133	10.866969	12.166969	16.337873	20.500133	21.675133	22.900133	23.000133	23.675133
18	6.260000	7.010000	8.230000	9.390133	10.900133	11.590133	13.000133	17.337873	21.600133	22.900133	24.000133	24.000133	24.675133
19	6.840000	7.630000	8.910000	10.100133	11.700133	12.337873	13.833122	18.337873	22.700133	24.000133	25.000133	25.000133	25.675133
20	7.430000	8.260000	9.590000	10.900133	12.400133	13.100133	14.666969	19.337873	23.800133	25.000133	26.000133	26.000133	26.675133
21	8.030000	8.900000	10.300000	11.600133	13.200133	13.900133	15.500133	20.337873	24.900133	26.000133	27.000133	27.000133	27.675133
22	8.640000	9.540000	11.000000	12.300133	14.000133	14.700133	16.337873	21.337873	26.000133	27.000133	28.000133	28.000133	28.675133
23	9.260000	10.200000	11.700000	13.100133	14.800133	15.500133	17.166969	22.337873	27.100133	28.000133	29.000133	29.000133	29.675133
24	9.890000	10.900000	12.400000	13.800133	15.700133	16.300133	18.000133	23.337873	28.200133	29.000133	30.000133	30.000133	30.675133
25	10.500000	11.500000	13.100000	14.600133	16.500133	17.100133	18.833122	24.337873	29.300133	30.000133	31.000133	31.000133	31.675133
26	11.200000	12.200000	13.800000	15.400133	17.300133	17.900133	19.666969	25.337873	30.400133	31.000133	32.000133	32.000133	32.675133
27	11.800000	12.900000	14.600000	16.200133	18.100133	18.700133	20.500133	26.337873	31.500133	32.000133	33.000133	33.000133	33.675133
28	12.500000	13.600000	15.300000	16.900133	18.900133	19.500133	21.337873	27.337873	32.600133	33.000133	34.000133	34.000133	34.675133
29	13.100000	14.300000	16.000000	17.700133	19.800133	20.300133	22.166969	28.337873	33.700133	34.000133	35.000133	35.000133	35.675133
30	13.800000	15.000000	16.800000	18.500133	20.600133	21.100133	23.000133	29.337873	34.800133	35.000133	36.000133	36.000133	36.675133