

מבוא לסטטיסטיקה בניהול

פרק 38 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

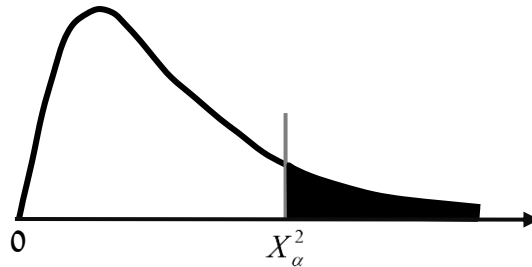
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

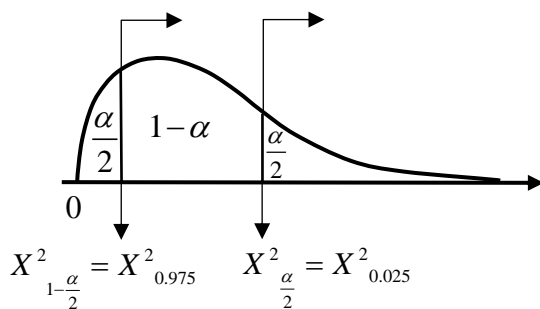
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

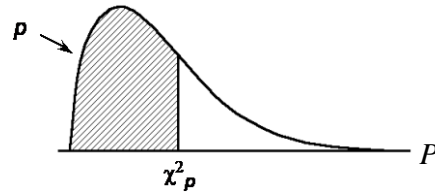
(1) $.8.4 < \sigma^2 < 194.2$

(2) א. $30.285 < \mu < 31.315$ ב. $0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.
 בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.

(4) א. $68.75 < \mu < 82.15$ ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.013445	0.020002	0.037467	0.102430	1.320321	2.706107	3.841463	5.023890	6.634896	7.879446
2	0.010000	0.020000	0.050610	0.103823	0.214778	0.575554	1.390203	2.770551	4.605171	5.988564	7.377787	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216746	0.352729	0.584350	1.212765	2.370152	4.110825	6.251351	7.814727	9.347825	11.344544	12.838159
4	0.207277	0.297772	0.484418	0.711162	1.064494	1.920907	3.357163	5.390202	7.779435	9.487714	11.141651	13.276678	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831413	1.155371	1.610738	2.675518	4.351464	6.625564	9.246471	11.141651	12.838159	15.086250	16.750131
6	0.675654	0.872243	1.238562	1.635309	2.204130	3.453383	5.348153	7.879446	10.644645	12.591600	14.449415	16.750131	18.547564
7	0.989266	1.240133	1.690766	2.179003	2.833058	4.253819	6.346877	9.037187	12.016778	14.164574	16.012784	18.475174	20.277561
8	1.344296	1.649778	2.180094	2.732637	3.490295	5.070831	7.344187	10.215707	13.442967	15.507413	17.534548	20.090230	22.026316
9	1.734954	2.099879	2.700108	3.337143	4.177187	5.903856	8.340734	11.416654	14.778301	16.919003	19.022813	21.665991	23.589312
10	2.169905	2.566973	3.250132	3.940293	4.875269	6.749955	9.347825	12.591600	16.012784	18.307033	20.530905	23.200714	25.188150
11	2.602521	3.052768	3.820801	4.575829	5.581415	7.579311	10.341801	13.700540	17.337369	19.678052	21.919060	24.724971	26.756853
12	3.076472	3.571796	4.400210	5.233058	6.302137	8.440607	11.337780	14.840697	18.575216	21.026031	23.336714	26.217065	28.304220
13	3.571796	4.110825	5.010777	5.890295	7.041498	9.302488	12.337780	16.012784	19.811900	22.478632	24.735593	27.688101	29.819520
14	4.077729	4.660864	5.630537	6.570831	7.790115	10.215707	13.337780	17.153813	21.064148	23.684671	26.119397	29.141243	31.316965
15	4.602876	5.230761	6.260262	7.260132	8.550130	11.141651	14.337780	18.245401	22.307172	25.000136	27.587113	30.578388	32.801303
16	5.144296	5.810537	6.910132	7.960293	9.310130	11.990202	15.337780	19.411900	23.541867	26.296227	28.845032	32.000233	34.266523
17	5.702430	6.410267	7.560132	8.670132	10.110130	12.838159	16.337780	20.590202	24.796151	27.587113	30.191060	33.408742	35.718153
18	6.260132	7.010132	8.230132	9.390132	10.910130	13.700540	17.337780	21.665991	26.010767	28.869100	31.526314	34.805349	37.153763
19	6.840293	7.630132	8.910132	10.110130	11.710130	14.602488	18.337780	22.724971	27.203539	30.143521	32.909573	36.190865	38.581230
20	7.430132	8.260132	9.590132	10.910130	12.410130	15.507413	19.337780	23.801351	28.442967	31.410437	34.200714	37.566473	40.000000
21	8.030132	8.900132	10.300132	11.630130	13.210130	16.337780	20.337780	24.911900	29.644645	32.671568	35.578388	38.932146	41.401243
22	8.640293	9.540132	11.010130	12.330130	14.010130	17.215707	21.337780	26.012784	30.811900	33.907879	36.780714	40.289312	42.796159
23	9.260132	10.200132	11.710130	13.110130	14.810130	18.110130	22.337780	27.110130	32.012784	35.172413	38.157113	41.634544	44.187564
24	9.890132	10.900132	12.410130	13.810130	15.710130	19.010130	23.337780	28.210130	33.210130	36.410130	39.410130	43.010130	45.566473
25	10.530132	11.550132	13.110130	14.610130	16.510130	19.910130	24.337780	29.310130	34.410130	37.710130	40.610130	44.310130	46.910130
26	11.200132	12.200132	13.810130	15.410130	17.310130	20.810130	25.337780	30.410130	35.610130	38.910130	41.910130	45.610130	48.310130
27	11.810130	12.900132	14.610130	16.210130	18.110130	21.710130	26.337780	31.510130	36.710130	40.110130	43.210130	47.010130	49.610130
28	12.500132	13.600132	15.310130	16.910130	18.910130	22.710130	27.337780	32.610130	37.910130	41.310130	44.510130	48.310130	51.010130
29	13.110130	14.300132	16.010130	17.710130	19.810130	23.610130	28.337780	33.710130	39.110130	42.610130	45.710130	49.610130	52.310130
30	13.810130	15.010130	16.810130	18.510130	20.610130	24.510130	29.337780	34.810130	40.310130	43.810130	47.010130	50.910130	53.710130