

# מבוא לסטטיסטיקה אלקטרוניקה ותוכנה

פרק 53 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן..... 1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

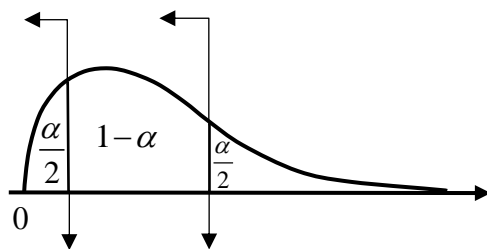
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.007388	0.010645	0.015773	0.023354	0.033571	0.048382	0.067564	0.093924	0.129381	0.188773	0.271885
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103773	0.214778	0.352729	0.505151	0.717142	1.064464	1.385815	1.847541	2.705543	3.841439
3	0.071714	0.115777	0.216447	0.352729	0.584394	0.924549	1.374695	1.924549	2.778719	3.841439	5.015817	6.251351	7.879128
4	0.207163	0.297872	0.484418	0.711162	1.064464	1.625561	2.365879	3.357163	4.713145	6.344094	8.467017	11.141651	14.860204
5	0.411643	0.554267	0.831439	1.155371	1.610739	2.335822	3.357163	4.713145	6.344094	8.467017	11.141651	14.860204	19.0228
6	0.675654	0.872243	1.236778	1.635309	2.204130	3.076354	4.351464	5.987764	8.033527	10.591422	13.751515	17.534548	22.457716
7	0.989266	1.240133	1.690766	2.179003	2.833058	3.827756	5.161478	7.006474	9.347827	12.017034	15.705426	20.154642	26.184545
8	1.344296	1.651547	2.179003	2.732637	3.490295	4.575647	6.167761	8.329091	11.158223	14.449126	18.475176	24.431426	31.526479
9	1.734724	2.098228	2.700108	3.337133	4.168223	5.091432	6.898155	9.347827	12.591644	16.919089	22.027032	28.588494	37.566193
10	2.169772	2.565884	3.246977	3.940347	4.875274	5.790854	7.779436	10.591422	14.188539	18.307037	24.431426	31.526479	39.578234
11	2.601055	3.052860	3.827756	4.575647	5.581416	6.581395	8.537683	11.577748	15.987176	20.027032	26.756853	34.152463	42.567037
12	3.076354	3.571796	4.401598	5.230215	6.302137	7.420377	9.590887	12.591644	17.275014	21.900922	29.151171	37.153675	45.755591
13	3.571796	4.114386	5.010804	5.891659	7.041535	8.313063	10.682777	13.677842	18.599083	23.684791	31.410437	40.152463	49.152463
14	4.077238	4.661976	5.630010	6.572969	7.790453	9.219853	11.827561	14.860204	20.065706	25.668788	33.801241	42.784548	52.779153
15	4.602876	5.230215	6.264217	7.262656	8.550131	10.178138	13.000794	16.151222	21.900922	27.488393	36.191241	45.558494	56.688539
16	5.148353	5.818454	6.912913	7.961631	9.312168	11.148658	14.333145	17.534548	23.684791	29.191241	38.581241	48.441241	60.791241
17	5.703830	6.416693	7.561610	8.670606	10.104205	12.196174	15.651222	19.132761	25.668788	31.526479	41.141651	51.424642	65.152463
18	6.269307	7.014932	8.230307	9.390581	10.902242	13.153700	17.000794	20.091644	27.706479	33.801241	43.784548	54.567037	70.071241
19	6.844784	7.633171	8.919004	10.119556	11.722279	14.141651	18.475176	21.315117	29.191241	36.191241	46.578234	58.337037	75.541241
20	7.430261	8.261410	9.617701	10.938531	12.572316	15.169778	19.990794	22.775014	31.526479	38.581241	49.632463	62.567037	81.931241
21	8.025738	8.909649	10.326398	11.757506	13.442353	16.227305	21.633145	24.431426	33.916479	41.141651	52.779153	67.152463	88.781241
22	8.631215	9.577888	11.045095	12.576481	14.332390	17.314831	23.581222	26.677842	36.416479	43.784548	56.191241	71.424642	96.201241
23	9.246692	10.266127	11.773784	13.405456	15.242427	18.432357	25.781222	29.191241	39.151171	46.578234	59.632463	75.784548	104.211241
24	9.872169	10.974366	12.512473	14.334431	16.182464	19.580377	27.981222	31.526479	42.151171	49.632463	63.191241	80.337037	112.931241
25	10.507646	11.702605	13.261162	15.273406	17.152501	20.760395	30.315117	34.281222	45.784548	52.779153	67.152463	85.984548	122.311241
26	11.153123	12.450844	14.027851	16.223381	18.152538	21.982421	33.116479	37.151171	49.632463	56.191241	71.424642	91.784548	132.331241
27	11.808600	13.219083	14.804540	17.183356	19.182575	23.247305	35.932357	40.151171	52.779153	59.632463	75.784548	97.731241	142.931241
28	12.474077	13.997322	15.591229	18.144331	20.172612	24.431426	38.781222	43.281222	56.191241	63.191241	80.337037	103.931241	154.131241
29	13.149554	14.785561	16.387918	19.115306	21.142649	25.651440	41.581222	46.578234	59.632463	67.152463	85.984548	110.784548	166.031241
30	13.835031	15.583800	17.194607	20.096281	22.102686	26.902464	44.981222	50.151171	63.191241	71.424642	91.784548	118.152463	179.031241