

# ביוסטטיסטיקה

פרק 37 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

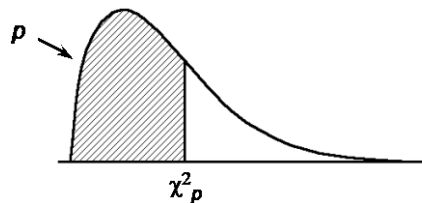
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....1

## רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

### רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$ .



$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} : \text{רווח הסמך לשונות}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} : \text{כאשר}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר:  $\sigma^2$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}$$

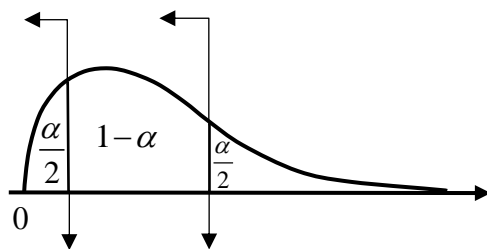
תוצאות מדגם:  $n = 4$ .

$$\bar{X} = \frac{4.7+5.2+4.6+5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n-1 = 4-1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$X^2_{0.025} = 0.216 \quad X^2_{0.975} = 9.35$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

## שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

### תשובות סופיות:

$$(1) \quad .8.4 < \sigma^2 < 194.2$$

$$(2) \quad \text{א. } .30.285 < \mu < 31.315 \quad \text{ב. } .0.836 < \sigma < 1.606$$

$$(3) \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad \text{ב. } .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ג. } .7.94 < \sigma < 13.7$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים איננו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$(4) \quad \text{א. } .68.75 < \mu < 82.15 \quad \text{ב. } .47.4 < \sigma^2 < 333.3$$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$  :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.013498	0.020097	0.037467	0.455192	1.320321	2.705543	3.841463	5.023890	6.634896	7.879443
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103823	0.210796	0.575554	1.390203	2.770551	4.605171	5.991465	7.377787	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115787	0.216710	0.352729	0.584350	1.212770	2.370177	4.110825	6.251351	7.814727	9.347827	11.344831	12.838157
4	0.207389	0.297865	0.484417	0.711162	1.064494	1.920907	3.356705	5.390781	7.779436	9.487714	11.141651	13.276678	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831413	1.154922	1.610765	2.675146	4.351464	6.625564	9.246451	11.070499	12.832502	15.086251	16.750131
6	0.675650	0.872243	1.238562	1.645561	2.204114	3.450297	5.348153	7.879170	10.644671	12.591619	14.451417	16.812461	18.547564
7	0.989266	1.240133	1.690866	2.179002	2.833058	4.254804	6.346867	9.037185	12.016778	14.164574	16.012784	18.475174	20.277561
8	1.344296	1.649778	2.180094	2.732637	3.490295	5.070831	7.344187	10.215730	13.442422	15.507413	17.534548	20.090228	22.026316
9	1.734728	2.090238	2.700108	3.337143	4.177187	5.903854	8.340734	11.416654	14.718671	16.919089	19.022813	21.665991	23.589312
10	2.169901	2.565884	3.250132	3.940293	4.875269	6.749854	9.347825	12.591651	16.012784	18.307034	20.530905	23.200714	25.188150
11	2.602521	3.052860	3.820168	4.573226	5.581415	7.578313	10.317764	13.716559	17.337399	19.678052	21.919060	24.724949	26.756853
12	3.076472	3.571846	4.400214	5.230215	6.302137	8.440153	11.316745	14.840697	18.574533	21.029563	23.336714	26.217065	28.304214
13	3.571846	4.110233	5.010260	5.890261	7.040153	9.302137	12.316745	16.012784	19.811903	22.418137	24.735593	27.707053	29.819174
14	4.070142	4.660233	5.630260	6.570261	7.790153	10.212137	13.316745	17.112784	21.141651	23.684671	26.119060	29.141228	31.319174
15	4.600142	5.230233	6.260260	7.260261	8.550153	11.102137	14.316745	18.212784	22.307034	25.000137	27.507053	30.578150	32.801316
16	5.140142	5.810233	6.910260	7.960261	9.310153	11.992137	15.316745	19.412784	23.541651	26.367137	28.845060	32.000137	34.266316
17	5.700142	6.410233	7.560260	8.670261	10.110153	12.882137	16.316745	20.512784	24.776671	27.587137	30.191060	33.407053	35.718150
18	6.260142	7.010233	8.230260	9.390261	10.910153	13.772137	17.316745	21.612784	26.012784	28.869060	31.526053	34.807053	37.156316
19	6.840142	7.630233	8.910260	10.110153	11.710153	14.672137	18.316745	22.712784	27.207034	30.141651	32.907053	36.191060	38.586316
20	7.430142	8.260233	9.590260	10.910153	12.410153	15.582137	19.316745	23.812784	28.412784	31.416651	34.207053	37.566316	40.000137
21	8.030142	8.900233	10.310260	11.610153	13.210153	16.502137	20.316745	24.912784	29.612784	32.678052	35.567053	38.912784	41.412784
22	8.640142	9.540233	11.010260	12.310153	14.010153	17.432137	21.316745	26.012784	30.812784	33.912784	36.787053	40.287053	42.787053
23	9.260142	10.210233	11.710260	13.110153	14.810153	18.362137	22.316745	27.112784	32.012784	35.178052	38.112784	41.612784	44.178052
24	9.890142	10.910233	12.410260	13.810153	15.610153	19.312137	23.316745	28.212784	33.212784	36.412784	39.412784	43.012784	45.587053
25	10.530142	11.610233	13.110260	14.610153	16.510153	20.282137	24.316745	29.312784	34.412784	37.678052	40.612784	44.312784	46.912784
26	11.190142	12.310233	13.810260	15.410153	17.310153	21.282137	25.316745	30.412784	35.612784	38.887053	41.912784	45.612784	48.312784
27	11.860142	12.910233	14.610260	16.210153	18.110153	22.212137	26.316745	31.512784	36.712784	40.112784	43.212784	47.012784	49.612784
28	12.540142	13.610233	15.310260	16.910153	18.910153	23.112137	27.316745	32.612784	37.912784	41.312784	44.512784	48.312784	51.012784
29	13.230142	14.310233	16.010260	17.710153	19.810153	24.012137	28.316745	33.712784	39.112784	42.612784	45.712784	49.612784	52.312784
30	13.840142	15.010233	16.810260	18.510153	20.610153	24.912137	29.316745	34.812784	40.312784	43.812784	47.012784	50.912784	53.712784