

הסקה סטטיסטית 30204

פרק 17 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן (יחידה 11)

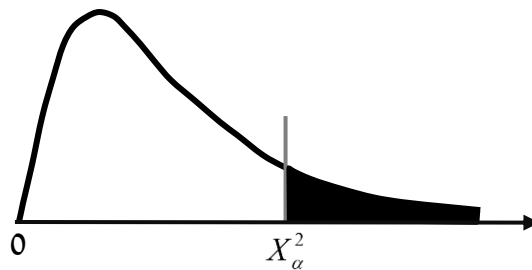
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

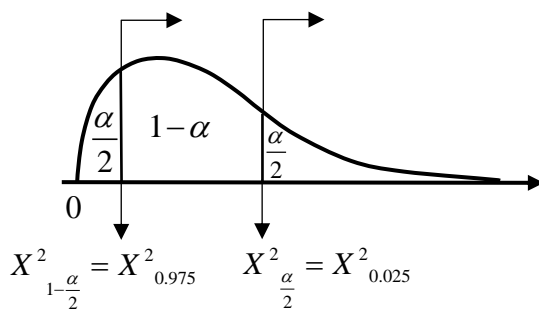
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

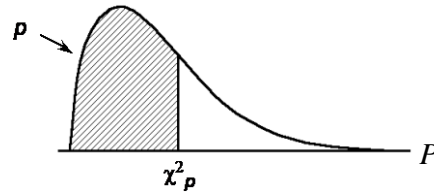
(1) $.8.4 < \sigma^2 < 194.2$

(2) א. $.30.285 < \mu < 31.315$ ב. $.0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $.99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $.7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.
 בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.

(4) א. $.68.75 < \mu < 82.15$ ב. $.47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.015775	0.023354	0.102430	0.455192	1.320321	2.705543	3.841463	5.023890	6.634896	7.879440
2	0.010000	0.020000	0.050610	0.103823	0.210721	0.575554	1.390231	2.770551	4.605170	5.991465	7.377757	9.210743	10.596631
3	0.071714	0.115777	0.216659	0.352729	0.584350	1.212701	2.370177	4.110825	6.251351	7.814727	9.347827	11.344544	12.838157
4	0.207264	0.297772	0.484418	0.711214	1.064495	1.920907	3.356705	5.390781	7.779436	9.487714	11.141651	13.276698	14.860204
5	0.411543	0.554267	0.831413	1.154922	1.610775	2.675146	4.351464	6.625564	9.246451	11.070499	12.832502	15.088250	16.755381
6	0.675650	0.872243	1.238562	1.635320	2.204130	3.450297	5.348156	7.879170	10.644645	12.591600	14.449130	16.750130	18.547564
7	0.989266	1.239843	1.690766	2.179002	2.833058	4.254904	6.346835	9.040951	12.016770	14.164574	16.012784	18.475174	20.277561
8	1.344296	1.649778	2.180091	2.732637	3.490297	5.070831	7.344187	10.215707	13.361536	15.507413	17.534548	20.090235	22.026316
9	1.734724	2.099872	2.700108	3.337133	4.167562	5.903856	8.340734	11.416654	14.697787	16.919089	19.022831	21.695922	23.589312
10	2.169900	2.565927	3.250133	3.940293	4.875274	6.749955	9.347825	12.591600	16.012784	18.307034	20.537561	23.179139	25.188140
11	2.602521	3.052768	3.820108	4.575829	5.581415	7.579311	10.317764	13.700557	17.337516	19.678052	21.912621	24.724951	26.756853
12	3.076472	3.571796	4.400108	5.230215	6.302131	8.444672	11.316745	14.800932	18.575814	21.029563	23.336714	26.217061	28.304220
13	3.571846	4.111925	5.010108	5.890232	7.041418	9.302828	12.338018	16.000034	19.811949	22.418137	24.735593	27.688136	29.819120
14	4.077714	4.662064	5.630108	6.570232	7.790274	10.202706	13.337068	17.153870	21.064172	23.684671	26.119122	29.141223	31.319226
15	4.602876	5.232212	6.260108	7.260232	8.550274	11.102706	14.337068	18.245953	22.307034	25.000136	27.587122	30.578136	32.801320
16	5.146221	5.812360	6.910108	7.960232	9.310274	11.992706	15.337068	19.411949	23.541870	26.296136	28.845034	32.000136	34.266420
17	5.707714	6.412508	7.560108	8.670232	10.100274	12.882706	16.337068	20.590781	24.796136	27.587122	30.191223	33.409136	35.718120
18	6.266221	7.012656	8.230108	9.390232	10.900274	13.772706	17.337068	21.664172	26.010136	28.869122	31.526136	34.800136	37.156120
19	6.841724	7.632804	8.910108	10.110232	11.700274	14.662706	18.337068	22.710136	27.200136	30.141223	32.909122	36.191223	38.581220
20	7.434221	8.262952	9.590108	10.910232	12.490274	15.552706	19.337068	23.780136	28.410136	31.412235	34.209122	37.566122	40.000120
21	8.032724	8.903100	10.300108	11.690232	13.270274	16.442706	20.337068	24.910136	29.640136	32.678122	35.569122	38.910122	41.409120
22	8.647221	9.543248	11.030108	12.450232	14.040274	17.332706	21.337068	26.010136	30.810136	33.912235	36.789122	40.280122	42.796120
23	9.266724	10.203396	11.780108	13.190232	14.800274	18.222706	22.337068	27.110136	32.010136	35.178122	38.159122	41.609122	44.166120
24	9.891221	10.873544	12.450108	13.910232	15.550274	19.112706	23.337068	28.210136	33.210136	36.412235	39.409122	43.000122	45.526120
25	10.520724	11.553692	13.140108	14.610232	16.290274	19.992706	24.337068	29.310136	34.410136	37.678122	40.649122	44.309122	46.876120
26	11.155221	12.243840	13.840108	15.290232	17.020274	20.872706	25.337068	30.410136	35.610136	38.889122	41.909122	45.569122	48.216120
27	11.794724	12.943988	14.550108	15.950232	17.740274	21.752706	26.337068	31.510136	36.710136	40.159122	43.209122	47.000122	49.546120
28	12.439221	13.654136	15.270108	16.590232	18.450274	22.632706	27.337068	32.610136	37.710136	41.339122	44.509122	48.309122	51.000120
29	13.088724	14.374284	16.000108	17.210232	19.150274	23.512706	28.337068	33.710136	39.110136	42.609122	45.709122	49.609122	52.300120
30	13.743221	15.104432	16.740108	17.810232	19.840274	24.392706	29.337068	34.810136	40.310136	43.809122	47.000122	50.909122	53.700120