

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות למדעי החברה ב' 30112

פרק 16 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן (יחידה 11)

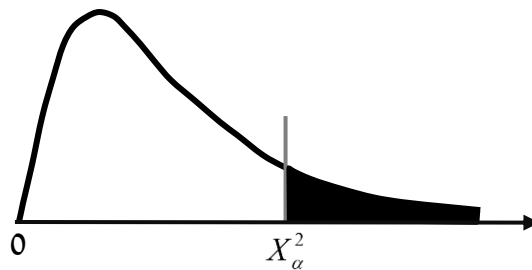
תוכן העניינים

1. רווח סמך לשונות וסטיית תקן גרסה 2 1

רווח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה. התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $n-1$.



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } \hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמאלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = \text{זמן תגובה (בשניות)}.$$

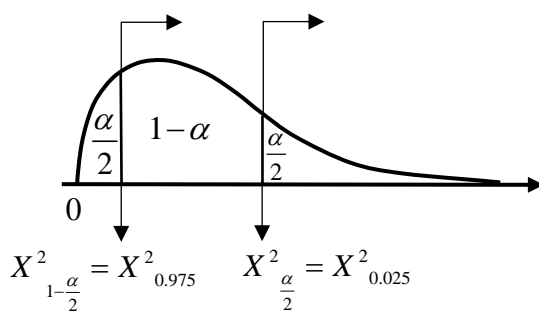
תוצאות מדגם: $n = 4$.

$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \quad \text{נציב:}$$

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots - 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות חי-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \quad \text{נציב:}$$

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

(1) חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18, 17, 21, 26, 28. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.

(2) נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:

א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.

(3) ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ.

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

להלן התוצאות שהתקבלו:

נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
- ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.
- ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
- ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

נתון ש:

- א. בנו רווח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
- ב. בנו רווח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

(1) $.8.4 < \sigma^2 < 194.2$

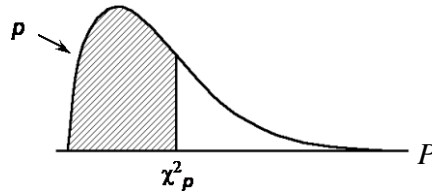
(2) א. $30.285 < \mu < 31.315$ ב. $0.836 < \sigma < 1.606$

(3) א. ממוצע: 104, שונות: 100. ב. $99.32 \leq \mu \leq 108.68$ ג. $7.94 < \sigma < 13.7$

ד. בבטחון של 95% תוחלת הציונים בישראל אינה שונה משל ארה"ב.
 בבטחון של 90% סטית התקן של הציונים בישראל שונה משל ארה"ב.

(4) א. $68.75 < \mu < 82.15$ ב. $47.4 < \sigma^2 < 333.3$

נספח - טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p :



df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005399	0.008391	0.013445	0.020002	0.033471	0.054129	0.700143	1.320321	1.636749	2.000133	2.302987	2.701105
2	0.010000	0.020000	0.050000	0.103853	0.210721	0.352729	0.575540	0.717229	1.390203	1.675712	2.000133	2.302987	2.701105
3	0.071714	0.115777	0.216449	0.352729	0.575540	0.717229	0.975002	1.212770	1.753768	2.071853	2.367787	2.748779	3.077644
4	0.207264	0.297871	0.484418	0.717229	1.064494	1.390203	1.753768	2.147783	2.701105	3.077644	3.357216	3.745441	4.108455
5	0.411643	0.554267	0.831476	1.153682	1.610775	2.071853	2.675541	3.337133	4.047905	4.607893	5.023890	5.618865	6.262157
6	0.676005	0.872273	1.238562	1.635294	2.204130	2.833058	3.599148	4.352923	5.209379	5.989321	6.581396	7.289157	8.034070
7	0.989266	1.240053	1.690766	2.179831	2.833058	3.599148	4.352923	5.209379	6.169171	6.977955	7.578594	8.329772	9.164574
8	1.344296	1.650047	2.180094	2.733062	3.490297	4.256415	5.070832	5.908745	6.897554	7.708513	8.329772	9.164574	10.027108
9	1.734724	2.099879	2.700108	3.337133	4.177187	5.070832	5.908745	6.897554	7.920804	8.717730	9.348033	10.215708	11.154749
10	2.160133	2.560000	3.250133	3.940297	4.877187	5.770832	6.634745	7.632923	8.642905	9.487730	10.128033	10.924708	11.779000
11	2.602571	3.050000	3.820133	4.570297	5.587187	6.470832	7.374745	8.402923	9.432905	10.287730	10.968033	11.704708	12.424000
12	3.076574	3.570000	4.400133	5.230297	6.307187	7.240832	8.174745	9.232923	10.317905	11.217730	11.918033	12.574708	13.274000
13	3.571846	4.110000	5.010133	5.890297	7.047187	8.040832	8.934745	9.932923	10.967905	11.867730	12.578033	13.374708	14.144000
14	4.077846	4.660000	5.630133	6.570297	7.797187	8.810832	9.734745	10.732923	11.767905	12.717730	13.428033	14.274708	15.034000
15	4.602871	5.230000	6.260133	7.260297	8.557187	9.690832	10.534745	11.532923	12.567905	13.517730	14.328033	15.174708	15.944000
16	5.146574	5.810000	6.910133	7.960297	9.317187	10.630832	11.334745	12.132923	13.167905	14.167730	14.428033	15.314708	16.874000
17	5.707846	6.410000	7.560133	8.670297	10.117187	11.740832	12.134745	12.832923	13.817905	14.817730	15.028033	15.514708	17.824000
18	6.266574	7.010000	8.230133	9.390297	10.917187	12.770832	13.134745	13.532923	14.517905	15.517730	15.628033	16.214708	18.794000
19	6.842871	7.630000	8.910133	10.110297	11.717187	13.740832	13.834745	14.232923	15.217905	16.217730	16.228033	16.914708	19.784000
20	7.434724	8.260000	9.590133	10.910297	12.517187	14.740832	14.534745	14.932923	15.917905	16.917730	17.028033	17.614708	20.794000
21	8.032571	8.900000	10.300133	11.710297	13.317187	15.740832	15.834745	15.632923	16.617905	17.617730	17.728033	18.314708	21.824000
22	8.646574	9.540000	11.030133	12.510297	14.117187	16.740832	16.734745	16.332923	17.317905	18.317730	18.428033	19.014708	22.874000
23	9.266574	10.200000	11.770133	13.310297	14.917187	17.740832	17.634745	17.032923	18.017905	19.017730	19.128033	19.714708	23.944000
24	9.892871	10.900000	12.430133	14.110297	15.717187	18.740832	18.534745	17.732923	18.717905	19.717730	19.828033	20.414708	25.034000
25	10.534724	11.550000	13.110133	14.910297	16.517187	19.740832	19.434745	18.432923	19.417905	20.417730	20.528033	21.114708	26.144000
26	11.192571	12.200000	13.810133	15.710297	17.317187	20.740832	20.334745	19.132923	20.117905	21.117730	21.228033	21.814708	27.274000
27	11.866574	12.900000	14.530133	16.510297	18.117187	21.740832	21.234745	19.832923	20.817905	21.817730	21.928033	22.514708	28.424000
28	12.556574	13.600000	15.270133	17.310297	18.917187	22.740832	22.134745	20.532923	21.517905	22.517730	22.628033	23.214708	29.594000
29	13.262871	14.300000	16.030133	18.110297	19.717187	23.740832	23.034745	21.232923	22.217905	23.217730	23.328033	23.914708	30.784000
30	13.984724	15.000000	16.810133	18.910297	20.517187	24.740832	23.934745	21.932923	22.917905	23.917730	24.028033	24.614708	31.994000