מבוא לסטטיסטיקה א

פרק 21 - רווח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים

תוכן העניינים

כששונויות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1-\bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2_1\ ,\ \sigma^2_2$ ידועות.
2. $X_1\ ,\ X_2\sim N$ או $n_1,n_2>30$.
3. שני מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1}+\frac{\sigma^2_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה 9200 ₪.
כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל 8700 ₪.
לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪. אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

שאלות:

1) מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?

2) ציוני IQ מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה״ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.

ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?

3) חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א׳ התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב׳ התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

1) (-20,90).

2) א. $-3.99 < \mu_1 - \mu_2 < 13.99$.

ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיים הבדל בין ישראל לארה״ב.

3) רמות בטחון הגבוהות מ-0.9476.

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1-\bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. $\sigma^2{}_1=\sigma^2{}_2$.
2. $X_1,X_2\sim N$.
3. מדגמים בלתי תלויים.

השונות המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה: $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

דרגות החופש: $d.f=n_1+n_2-2$.

רווח סמך: $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2}\cdot\sqrt{\frac{S^2{}_p}{n_1}+\frac{S^2{}_p}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים.להלן תוצאות המדגם שנעשה:

	תל אביב	באר שבע
מספר האקדמאים	20	10
ממוצע הכנסות של אקדמאים	11,000	9500
סטיית התקן של הכנסות אקדמאים	200	250

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.
הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ.
להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2) להלן 4 תצפיות על משתנה X שמתפלג: $N\left(\mu_x,\sigma^2\right)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N\left(\mu_y,\sigma^2\right)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל- $\mu_y-\mu_x$ ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

1) הנחות:
1. השונות שווה.
2. שהציונים מתפלגים נורמלית.
3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.

$-5.52<\mu_1-\mu_2<17.52$.

2) $-9.6<\mu_y-\mu_x<1.6$.

כששונויות האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_1-\mu_2$, כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1-\bar{x}_2$.

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. מדגמים גדולים.
2. מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך: $(\bar{x}_1-\bar{x}_2)\pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S^2{}_1}{n_1}+\frac{S^2{}_2}{n_2}}$.

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של $1-\alpha$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

יבואן רכב מעוניין להשוות בין רכבים יפנים לעומת רכבים אמריקאים מבחינת תצרוכת הדלק שלהם. נדגמו 40 רכבים מכל סוג. לכל רכב נבדק כמות הק"מ שהמכונית נסעה עבור 1 ליטר דלק במהירות של 100 קמ"ש. התוצאות שהתקבלו במדגם הם: ברכבים היפנים ממוצע 12.5 עם סטיית תקן 1.5 וברכבים האמריקאים הממוצע 11.3 עם סטיית תקן של 1.4.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער הממוצעים של צריכת הדלק של מכוניות יפניות לעומת אמריקאיות.

ב. האם על סמך רווח הסמך ניתן לקבוע שקים הבדל בין שני סוגי הרכבים מבחינת צריכת הדלק?

שאלות:

1) במדגם של 45 תלמידים הלומדים משפטים התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 4 שעות עם סטיית תקן 2 שעות מעבר לשעות הלימוד בכיתה.
במדגם של 55 תלמידים הלומדים הנדסה התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 10 שעות עם סטיית תקן של 3 שעות.

א. אמדו את הפרש ממוצעי שעות הלמידה של סטודנטים למשפטים לעומת סטודנטים להנדסה ברמת בטחון של 90%.

ב. האם קיים הבדל בין סטודנטים למשפטים ולסטודנטים להנדסה מבחינת ההשקעה שלהם מעבר לשעות הלימוד בכיתה?

2) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות וסטיית תקן של 0.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות וסטיית תקן של 1.1 שעות.
מצאו רווח סמך לפער בין ממוצע שעות הצפייה בטלוויזיה בין שני האזורים בביטחון של 95%.

תשובות סופיות:

1) א. $-6.83 < \mu_1 - \mu_2 < -5.17$.   ב. כן.

2) כן, בביטחון של 90% סטודנטים להנדסה לומדים יותר מסטודנטים למשפטים.