תהליכים אקראיים בפיזיקה

פרק 47 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

1. הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית 1

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.



א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y)=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=2$$

$Y\sim\exp(\lambda=2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

א. $X\sim P(\lambda=2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W\sim P(\lambda=2\cdot 60=120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

ג. $$P(x<2)=P(x\le 1)=P(x=0)+P(x=1)=\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}+\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}$$

$$e^{-2}+2e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}=0.406$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?

ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שעתיים.



א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?

ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?

ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.



א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?

ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.



א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?

ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?

ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 21:20 ל-21:30?

ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

5) הוכיחו שאם מספר המופעים ליחידת זמן מתפלג פואסונית בקצב λ, אז הזמן החולף מזמן 0 עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. 0.0948 ב. 0.1

2) א. 103.7 ב. 240 ג. 0.5

3) 115.13 ב. 0.0713

4) א. 0.59399 ב. 0.0821 ג. 0.0200 ד. 0.3679

5) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל