

סטטיסטיקה א לכלכלנים

פרק 51 - קשרים בין התפלגויות מיוחדות

תוכן העניינים

1. התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות.....1
2. התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות.....4
3. הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית.....7

התפלגות סכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

קיימות n התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו: $i = 1, 2, \dots, n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$.

ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגויות הללו: $\sum_{i=1}^n X_i$.

משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסוני עם פרמטר: $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

לסיכום, אם: $i = 1, 2, \dots, n$, $X_i \sim P(\lambda_i)$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

אז מתקיים: $\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות ג'לי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצבעים כתום, ירוק, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצבעים בשניית ייצור במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשנייה כלשהי בכל אחד מהצבעים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצבעים האחרים.

א. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי ייוצרו בדיוק 14 סוכריות ג'לי במפעל?

ב. מה ההתפלגות של מספר סוכריות הג'לי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?

ג. מה ההסתברות שבשנייה כלשהי המפעל ייצר 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצבעים אחרים?

צבע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

תשובה :



$$. P(T = 14) = e^{-12} \cdot \frac{12^{14}}{14!} = 0.0905 \quad \text{א.}$$

$$. \sum_{j=1}^{60} T_j \sim P(12 \cdot 60 = 720) , \quad j \quad \text{ב.} \quad T_j \sim P(12) \quad \text{מספר סוכריות שמיוצרות בשנייה}$$

$$. P(X_1 = 4 \cap T = 8) - P(X_1 = 4 \cap \sum_{i=2}^4 X_i = 4) = P(X_1 = 4) \cdot P\left(\sum_{i=2}^4 X_i = 4\right) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^4}{4!} = 0.0112 \quad \text{ג.}$$

שאלות:

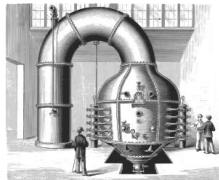
- (1) איזבלה היא רשת של חנויות בגדים. לרשת שלוש חנויות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובחנות C קצב הרכישות הוא 2 לרבע שעה. אין תלות בין מספרי הרכישות בחנויות הרשת השונות.



א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל חנויות הרשת בשעה?

ב. מה ההסתברות שבשעה כלשהי מספר הרכישות בחנויות הרשת יהיה לכל היותר 5?

- (2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א' מתפלג פואסוני עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב' מתפלג פואסוני עם תוחלת של תקלה אחת ביום.



מספרי התקלות במכונות השונות בלתי תלויים זה בזה.

א. מה ההתפלגות של מספר התקלות במפעל ביום?

ב. מה ההסתברות שביומיים מסוימים כלל לא יהיו תקלות במפעל?

ג. מה ההסתברות שביומיים מסוימים יהיו במפעל בדיוק 5 תקלות, שמהן בדיוק 3 תקלות במכונה א'?

תשובות סופיות:

- (1) א. תוחלת: 15, סטיית תקן: $\sqrt{15}$. ב. 0.0028.
 (2) א. פואסוני עם פרמטר 3. ב. 0.0025. ג. 0.0529.

התפלגות סכום התפלגויות בינומיות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינומית עם אותו פרמטר p , סכום המשתנים יתפלג בינומית עם פרמטר p . באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינומית עם הפרמטרים (n_i, p) לכל: $i = 1, 2, \dots, m$, והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים: $\left(\sum_{i=1}^m n_i, p\right)$.

דוגמה:



ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים. מהי התפלגות מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3? מהי תוחלת מספר הפעמים שבהן ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה: ב"ת

$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.

$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right)$ - מספר הפעמים שדינה קיבלת פחות מ-3.

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4 + 2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(x) = n \cdot P$$

$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:



- (1) יוסי מטיל מטבע ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבע שש פעמים.
אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.
א. מה ההתפלגות של X ?
ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?



- (2) במבחן שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות שרק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסוג נכון או לא נכון. סטודנט ניגש לבחינה ומנחש את כל התשובות בבחינה.
א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היותר על 3 שאלות?
ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה של הסטודנט?



- (3) רונן הזמין למסיבת יום ההולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים. כל גבר יגיע למסיבה בהסתברות 0.7, וכל אישה תגיע למסיבה בהסתברות 0.9. ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.
א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבה בדיוק 9 גברים ו-8 נשים?
ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבה לפחות 17 אורחים?

- (4) נתון ש: $X \sim B(2, 0.5)$, $Y \sim B(3, 0.6)$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה בזה.
א. מצאו את ההתפלגות של $X + Y$.
ב. מצאו את: $P(X + Y = 2 | X > 0)$.

- (5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים m, p .
האם גם המשתנים המקריים X ו- $W = X + Y$ בלתי-תלויים זה בזה?

- (6) X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. X מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_x, p ו- Y מתפלג בינומית עם הפרמטרים n_y, p .
הוכיחו ש- $X + Y$ מתפלג בינומית עם הפרמטרים $n_x + n_y, p$.

תשובות סופיות:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| ב. $E(X) = 5, V(X) = 2.5$. | (1) א. $X \sim B(10, 0.5)$. |
| ב. תוחלת: 7.5, שונות: 4.375. | (2) א. 0.0178. |
| ב. 0.0751. | (3) א. 0.0521. |
| ב. 0.2133. | (4) א. עיין בסרטון הוידאו. |
| | (5) המשתנים תלויים. |
| | (6) שאלת הוכחה. |

הקשר בין התפלגות פואסונית להתפלגות מעריכית:

רקע:

אם מספר המופעים ביחידת זמן כלשהי מתפלג פואסונית בקצב λ , אז הזמן החולף מתחילת מרווח הזמן עד להתרחשות המופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ לאותה יחידת זמן.

אפשר לומר גם ההפך: אם הזמן החולף מתחילת מרווח זמן מסוים עד למופע הראשון הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר λ ליחידת זמן, אז מספר המופעים ביחידת הזמן מתפלג פואסונית בקצב λ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשדה התעופה סכיפהול שבאמסטרדם הזמן החולף בין טיסה נכנסת אחת לזו שאחריה מתפלג מעריכית עם תוחלת של חצי דקה.



א. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בדקה?

ב. מה ההתפלגות של מספר הטיסות הנכנסות בשעה?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי ייכנסו פחות משתי טיסות לשדה התעופה?

תשובות:

$$E(Y) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 2$$

$Y \sim \exp(\lambda = 2)$ הזמן בין טיסות נכנסות בדקות.

א. $X \sim P(\lambda = 2)$ מספר הטיסות הנכנסות בדקה.

ב. $W \sim P(\lambda = 2 \cdot 60 = 120)$ מספר הטיסות הנכנסות בשעה.

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}$$

$$e^{-2} + 2e^{-2} = 3e^{-2} = \frac{3}{e^2} = 0.406$$

שאלות:

- (1) מספר המיילים שגל מקבלת ביממה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 מיילים.



- א. מה ההסתברות שמחר גל תקבל בדיוק 12 מיילים?
 ב. מה תוחלת הזמן שיעבור מהרגע שבו גל תפתח את המחשב ועד שתקבל את המייל הראשון?

- (2) מספר השיעולים בתיאטרון בזמן הצגה מתפלג פואסונית בקצב של שני שיעולים לדקה. משך ההצגה הוא שעה שתיים.



- א. מה התוחלת של מספר הדקות בהצגה שבהן יש לפחות שיעול אחד?
 ב. מה התוחלת של מספר השיעולים בהצגה?
 ג. מה תוחלת הזמן בין שיעול לשיעול בהצגה?

- (3) הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת חשמלית מתפלג מעריכית עם תוחלת של 50 שעות.



- א. מהו העשירון העליון של הזמן בין תקלה אחת לבאה אחריה במערכת?
 ב. מה ההסתברות שביממה מסוימת יהיו שתי תקלות במערכת?

- (4) מספר הפניות למונית של דוד בשעות הערב הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית. בממוצע דוד מקבל בשעות הערב פנייה אחת בשתי דקות. משמרת הערב שלו אורכת חמש שעות.



- א. מה ההסתברות שבמשך ארבע דקות כלשהן במשמרת יקבל דוד לפחות שתי פניות?
 ב. אם נכנסת למונית של דוד בשעות הערב, מה ההסתברות שמרגע כניסתך יעברו לפחות חמש דקות עד שתתקבל הפנייה הבאה למונית?
 ג. דוד עובד שש משמרות בשבוע. מה ההסתברות שרק במשמרת אחת בשבוע הוא יקבל בדיוק 12 פניות בין 20:21 ל-21:30?
 ד. נניח שחלפה דקה מאז הפנייה האחרונה למונית ועדיין לא הגיעה אף פנייה נוספת. מה ההסתברות שעד להגעת פנייה נוספת יחלפו עוד שתי דקות לפחות?

תשובות סופיות:

(1	א. 0.0948	ב. 0.1	
(2	א. 103.7	ב. 240	ג. 0.5
(3	115.13	ב. 0.0713	
(4	א. 0.59399	ב. 0.0821	ג. 0.0200 ד. 0.3679